УДК 517

Бердиёров Азамат Шодиевич, Джанизоков Улугбек Абдуганиевич,
Арслонов Улугбек Умир угли
Джизакский политехнический институт

ПОСТРОЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПРОСТЬХ ИТЕРАЦИЙ

Аннотация: *Одной из основных задач в теории казилинейных интегро-дифференциальных уравнений является задача о существовании периодических решений. В статье приведено метод итерации для интегро-дифференциальных уравнений представляющий вариационный вариант малого параметра Ляпунова-Пуанкаре,рассмотренный Ю.А.Рябовым.*

Ключевые слова: *интегро-дифференциальные уравнения, 2 периодическое решение, малые параметры, ряды Фурье, критические случаи первого порядка, метод интерации и мажорирующие уравнения.*

Berdiyorov Azamat Shodievich, Janizokov Ulugbek Abduganievich,
Arslonov Ulugbek Umir coal
Jizzakh Polytechnic Institute

CONSTRUCTING PERIODIC SOLUTIONS USING THE SIMPLE ITERATION METHOD

Annotation: *One of the main problems in the theory of casilinear integro-differential equations is the problem of the existence of periodic solutions. The article presents an iteration method for integro-differential equations representing a variational version of the small Lyapunov-Poincaré parameter considered by Yu.A. Ryabov.*

Key words: *integro-differential equations, 2 periodic solution, small parameters, Fourier series, critical cases of the first order, method of integration and majorizing equations.*

В данной статье посвяшена распостраннению на системи интегро – дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконично далеким последействием методы малого параметра Ляпунова-Пуанкаре и метод мажорирущих уровнений Ляпунова, рассмотренным Ю.К.Рябовым при построении и анализ периодических решений квазилинейных систем, обикновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon\left[\int_{-\infty}^{t} R(t-s)x(s)ds + F(x, t)\right] \qquad (1)$$

$\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right)$ где x – n – мерный вектор;

A – постоянная ($n \times n$) – матрица, обладающая резонансными собственными значениями (равными нулю или целой кратности $\sqrt{-1}$);

$F(x, t)$ – вектор функция, аналитическая по x, 2π – периодическая и всюду дифференцируемая по t;ε – положительный параметр;$R(t–s)$ – ядро релаксации. Линейная однородная система, соответствующая (1), т.е.

$$\frac{dx}{dt} = Ax \qquad (2)$$

обладает при принятых допущениях о собственных значениях матрицы A – семейством 2π – периодических решений, т.е.

$$x(t, c) = V(t)c, \qquad (3)$$

где $V(t)$ – ($n \times m$) – матрица; c – произвольный постоянный вектор.

При ε = 0 получим так называемое порождающееся семейство 2π – периодических решений $x_0(t, c) = V(t)c.$ (4)

Здесь c – произвольный вектор. Полагаем в (1) $x = x_0(t, c) + y$ (5)

и получим для y систему

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \varepsilon\left[\int_{-\infty}^{t} R(t-s)y(s)ds + f(y, c, t)\right], \qquad (6)$$

Где $$f(y,c,t)=\int_{-\infty}^{t}R(t-s)x_0(s,c)ds+F(x_0(t,c)+y,t). \qquad (7)$$

Будем искать функцию $y(t,\ \varepsilon)$ и постоянную $c(\varepsilon)$ методом итераций, считая, что последовательные приближения y_1, y_2, … и c_0, c_1, c_2, … удовлетворяют системам

$$\frac{dy_1}{dt}=Ay_1+\varepsilon\left[\int_{-\infty}^{t}R(t-s)y_1(s)ds+f(0,c_0,t)\right]; \qquad (8)$$

$$\frac{dy_k}{dt}=Ay_k+\varepsilon\left[\int_{-\infty}^{t}R(t-s)y_k(s)ds+f(y_{k-1},c_{k-1},t)\right],\ k\geq 2 \qquad (9)$$

При этом будем искать все $y_k = y_k(t,\ \varepsilon)$ как 2π –периодической функции, ортогональные по всем 2π–периодическим решениям однородной системы (2). Рассматриваем сначала систему (8) для первого приближения $y_1 = y_1(t,\ \varepsilon)$ и стараемся удовлетворить, если возможно, условию существования 2π – периодического решения этой системы, т.е. условию, аналогичному (15) формула:

$$\Phi_0(c_0)=\int_{0}^{2\pi}H(t)f(0,c_0,t)dt=0, \qquad (10)$$

где $H(t)$ – матрица, сопряженная по отношению к матрице $\overline{H}(t)=\tilde{V}(t)$;

$\tilde{V}(t)$ – матрица периодических решений системы, сопряженной к (2).

Это уравнение относительно постоянного вектора $\boldsymbol{c_0}$ (уравнение для порождающих амплитуд). Если оно имеет вещественное решение $\boldsymbol{c_0 = c_0^*}$ (в случае, когда решение (4) выбирается вещественным), то саму функцию $y_1(t,\ \varepsilon)$ находим как частное 2π – периодическое решение системы (8), ортогональное семейству (3). После этого рассматриваем систему для второго приближения $y_2 = y_2(t,\ \varepsilon)$. Условие существования периодического решения этой системы

$$\varPhi_1(c_1,\, \varepsilon) \equiv \int\limits_0^{2\pi} H(t)\, f\,(y_1(t,\, \varepsilon)c_1,\, t)dt = 0 \qquad (11)$$

является уравнением для определения постоянного вектора c_1, зависящего от параметра ε. Если оно имеет вещественное решение $c_1 = c_1^*(\varepsilon)$, обращающееся в c_0^* при $\varepsilon = 0$, то $y_2(t, \varepsilon)$ определяем опять как частное 2π – периодическое решение системы (8) при $k = 2$), ортогональное к семейству (3) и т.д.

Определение. Для системы (1) имеет место критический случай k–го порядка, если система (9) для k–го приближения является первой, для которой условие существования периодического решения, представляющее уравнение относительно постоянного вектора c_{k-1}, или не имеет вещественного решения или имеет решение c^*_{k-1}, являющееся простым при условии учета соответствующих членов низшего порядка относительно ε в выражении для

$$\varPhi_{k-1}(c_{k-1},\, \varepsilon) \equiv \int\limits_0^{2\pi} H(t)\, f\,(y_{k-1}(t,\, \varepsilon)c_{k-1},\, t)dt$$

Естественно, что проверка этих условий осуществляется последовательно: сначала при $k = 1$, затем при $k = 2$ и т.д. Тогда непосредственно и выбираются члены низшего порядка, которые следует учитывать при установлении, является ли решение уравнения для вектора c_{k-1} простым.

При $k = 1$ имеем для $\boldsymbol{c_0}$ уравнение (10), совпадающее с уравнением порождающих амплитуд (13). Если оно имеет вещественное простое решение, то мы приходим к условию основного варианта, разработанного выше. Пусть уравнение (10) имеет решение $c = c_0^*$ не являющееся простым, т.е. пусть

$$det\, B_0 = det\left(\frac{\partial \varPhi_0(c_0)}{\partial c_0}\right)_{c=c_0^*} = 0. \qquad (12)$$

Тогда обратная матрица B_0^{-1}, не существует. Это означает, что для системы (9) $k \geq 2$ мы не можем гарантировать выбор постоянных векторов $c_{k-1}(\varepsilon)$, обращающихся в c_0^* при $\varepsilon = 0$ и обеспечивающих существование 2π – периодических решений $y_k(t, \varepsilon)$, $k \geq 2$ обращающихся в нуль вместе с ε. Действительно, рассмотрим систему (6), представив функцию $f(y, c, t, \varepsilon)$ в виде

$$f(y, c, t) = f_0(t, c) + p(t, c)y + Q(y, c, t), \tag{13}$$

где

$$f_0(t, c) = \int_{-\infty}^{t} R(t-s)x^0(t, s)ds + F(x^0(t, c), t);$$

$$p(t, c) = \frac{\partial F(x^0(t, c), t)}{\partial x}; \tag{14}$$

$$Q(y, c, t) = F(x^0(t, c) + y, t, c) - f_0(t, c) - p(t, c)y.$$

Определив решение $c = c_0^*$ уравнения

$$\Phi_0(c_0) \equiv \int_0^{2\pi} H(t) f(0, c_0, t, 0)dt \equiv \int_0^{2\pi} H(t) f_0(t, c_0)dt = 0. \tag{15}$$

найдем из системы (8) первое приближение $y_1(t, \varepsilon)$ и перейдем к системе для второго приближения, т.е. к системе

$$\frac{dy_2}{dt} = Ay_2 + \varepsilon\left[\int_{-\infty}^{t} R(t-s)y_2(s)ds + f_0(t, c) + p(t, c)y_1 + Q(y_1, c_1, t)\right]. \tag{16}$$

Уравнение (11), представляющее условие существования периодического решения этой системы, запишется в виде

$$\Phi_1(c_1, \varepsilon) \equiv \int_0^{2\pi} H(t)\left[f_0(t, c_1) + p(t, c_1)y_1 + Q(y_1, c_1, t)\right]dt = 0. \tag{17}$$

При $\varepsilon = 0$ (тогда и $y_1 = 0$) это уравнение выраждающееся уравнение (15) $\Phi_0(c_1) = 0$ и имеет решение $c = c_0^*$. Однако ввиду условия (12) имеем

$$\det\left(\frac{\partial \Phi(c_0, \varepsilon)}{\partial c_1}\right)_{\varepsilon=0,\, c_1=c_0^*} = 0.$$

и мы не можем гарантировать при произвольных функциях p, y_1, Q порядка ε и выше существование решения $c_1 = c_1(\varepsilon)$ полного уравнения, обращающегося в c_0^* при $\varepsilon = 0$.

Возникает вопрос об условиях, гарантирующих существование всех векторов $c_k(\varepsilon)$, $k \geq 1$ обращающихся в c_0^* при $\varepsilon = 0$ и обеспечивающих существование 2π – периодических приближений $y_k(t, \varepsilon)$, $k \geq 2$.

Естественной является ситуация, когда в правой части уравнения (17), если отбросить функцию $f_0(t, c_1)$, низший порядок членов относительно ε равен единице. Такие члены можно получить, если вектор $\int_0^{2\pi} p(t, c_1) y_1(t, \varepsilon) dt$ не равен тождественно нулю (так как // $y_1(t, \varepsilon)$ // □ ε).

Тогда в левой части уравнения (17) при отбрасывании $f_0(t, c_1)$ младшие члены относительно ε имеют первый порядок, так как функция $Q(y_1(t, \varepsilon), c_1, t)$ имеет 2-ой порядок относительно y_1.

Обозначим

$$\int_0^{2\pi} H(t) p(t, c_1) y_1 dt = \varepsilon N_1(c_1) + 0(\varepsilon); \qquad (18)$$

$$\int_0^{2\pi} H(t) Q(y_1(t, \varepsilon), c_1, t) dt = \varepsilon^2 N_2(c_1) + 0(\varepsilon^2), \qquad (19)$$

где $N_1(c_1)$ и $N_2(c_1)$ не зависят от ε. Уравнение (17) перепишется тогда в виде

$$\Phi_1(c_1, \varepsilon) = F_0(c_1) + \varepsilon N_1(c_1) + \varepsilon^2 N_2(c_1) + N_3(\varepsilon) = 0, \qquad (20)$$

где $N_3(\varepsilon)$ имеет порядок не ниже ε^2.

Определение. Простым решением $c = c_0^*(\varepsilon)$ уравнения (17) с учетом членов низшего (или первого) порядка относительно ε называется такое, которое отличается по норме от решения c_0^* уравнения $\Phi_0(c_0) = 0$ на величину порядка ε^λ, $0 < \lambda < 1$ и для которого функциональный определитель

$$det\left(\frac{\partial \Phi_1(c_1^*(\varepsilon),\, \varepsilon)}{\partial c_1}\right), \tag{21}$$

будучи отличным от нуля, имеет тот же порядок ε^λ.

Справедлива следующая теорема, показывающая смысл такого понятия простого решения.

Теорема. Пусть функции $F_0(c)$, $N_1(c)$ дважды дифференцируемы по $\boldsymbol{c}$ и пусть вместе с уравнением

$$\overline{\Phi}_1(c_1,\, \varepsilon) \equiv F_0(c) + \varepsilon N_1(c) = 0 \tag{22}$$

рассматривается другое уравнение

$$\Phi(c,\, \varepsilon) \equiv \overline{\Phi}_1(c,\, \varepsilon) + \varepsilon^2\, \Phi_2(c,\, \varepsilon) = 0, \tag{22$_1$}$$

левая часть которого отличается от $\overline{\Phi}_1(c_1,\, \varepsilon)$ членами порядка ε^2 и выше, причем $\Phi_2(c,\ \varepsilon)$ дифференцируемая функция $\boldsymbol{c}$. По ε все функции непрерывны.

Тогда каждому простому решению $c_1^*(\varepsilon)$ уравнения (22) соответствует единственное решение $c = c(\varepsilon)$ уравнения (22_1), обращающееся в $c_1^*(\varepsilon)$ при $\Phi_2 = 0$ и отличающееся от решения $c_1^*(\varepsilon)$ уравнения (22) членами порядка выше ε^λ. Главные части решения $c_1^*(\varepsilon)$ и $c(\varepsilon)$ порядка ε^λ совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. –М., Наука, 1979.-431 с.*

2. *Лика Д.К., Рябов Ю.А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. Кишинев: Штиница, 1974-291 с.*

3. *Бердиёров А.Ш. Построение периодического решения интегро-дифференциалъного уравнения типа Волътерра в критическом случае. Деп.ВИНИТКИ 03.05.1990 г. №2380-В90. -10с.*

4. Бердиёров А.Ш. Построение периодических решений интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с бесконечным последействием в критическом случае выше первого порядка.-Деп.ВИНИТКИ 16.04.1990 г. №2056-В90. -11с.

5. Неъматов, А. Р., Рахимов, Б. Ш., & Тураев, У. Я. (2016). СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА. Ученый XXI века,

6. Гадаев, Р. Р., & Джонизоков, У. А. (2016). О семействе обобщенных моделей Фридрихса. Молодой ученый, (13), 5-7.

7. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2021, June). ON SOME PROBLEMS OF EXTREME PROPERTIES OF THE FUNCTION AND THE APPLICATION OF THE DERIVATIVE AND METHODS FOR THEIR SOLUTION. In Archive of Conferences (pp. 113-117).

8. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2020). ABOUT THE ISSUES OF GEOMETRICAL INEQUALITIES AND THE METHODS OF THEIR SOLUTION. European science, (7 (56)).

9. Гадаев, Р. Р., Джонизоков, У. А., & Ахадова, К. С. К. (2020). ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА ДВУМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА. Наука и образование сегодня, (12 (59)).

10. Alimov, B., Polatov, B. S., Fayzullayev, A. N. O., & Qongirov, M. N. O. (2021). MATEMATIKADA UCHINCHI SHAXS YUMORI. Academic research in educational sciences, 2(1).

11. Berdiyorov, T., Berdiyorov, A., Ergashxodjaeva, S., & Berdiyorova, N. (2020). Innovation Marketing in Electronic Ticketing System and Strategic Relationship in Public Transport. Архив научных исследований, (3).

12. Berdiyorov, A., Berdiyorov, T., Nasritdinov, J., Qarshiboev, S., & Ergashkxodjaeva, S. (2021, July). A Sustainable Model of Urban Public Mobility in Uzbekistan. In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (Vol. 822, No. 1, p. 012008). IOP Publishing.

13. *ТТ, А. Б., ТТ, У. Т., & Хайдаров, Т. Т. (2015). Построение периодических решений квазилинейных уравнений при резонансе в критическом случае первого порядка. Инновационная наука, (5-3).*