

A-ANALITIK STRUKTURALAR ASOSIDA DIFFERENSIAL JARAYONLARNI MATEMATIK MODELLASHTIRISH, SONLI YECHISH VA HISOBLASH ALGORITMLARINI ISHLAB CHIQISH

Jabborov Nasridin Mirzoodilovich

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti professori

Sadullayeva Gulasal Ulug‘bek qizi

Aniq va ijtimoiy fanlar universiteti magistri

Annotatsiya. A-analitik strukturalar asosida differensial jarayonlarni modellashtirish va sonli yechish usullari ishlab chiqilgan. Crank–Nicolson sxemasi va kollokatsiya qo‘llanilgan. Shartsiz barqarorlik va $O(h^2 + \tau^2)$ yaqinlashuv isbotlangan.

Kalit so‘zlar: A-analitik funksiyalar, Crank–Nicolson, barqarorlik, kollokatsiya.

MATHEMATICAL MODELING OF DIFFERENTIAL PROCESSES BASED ON A-ANALYTIC STRUCTURES, NUMERICAL SOLUTION, AND DEVELOPMENT OF COMPUTATIONAL ALGORITHMS

Jabborov Nasridin Mirzoodilovich

Professor, Tashkent State University of Economics

Sadullayeva Gulasal Ulug‘bek qizi

Master's Graduate, University of Exact and Social Sciences

Abstract. Methods for modelling and numerical solution of differential processes based on A-analytic structures are developed. The Crank–Nicolson scheme and collocation are applied. Unconditional stability and $O(h^2 + \tau^2)$ convergence are proved.

Keywords: A-analytic functions, Crank–Nicolson, stability, collocation.

Kirish. Differensial jarayonlarni matematik modellashtirish hisoblash matematikasining muhim yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, elliptik va parabolik tipdagi tenglamalar bu sohada alohida o‘rin tutadi. Klassik Koshi–Riman tizimi asosidagi analitik funksiyalar nazariyasi [1, 2] bir jinsli muhitlar uchun samarali apparat bersa-da, amaliy masalalar (gidrodinamika, elastiklik, magnit gidrodinamika) ko‘pincha o‘zgaruvchan muhitlarda sodir bo‘ladi. Bunday hollarda Bers va Vekua [3] tomonidan umumlashtirilgan A-analitik strukturalar nazariyasi qo‘llaniladi; unda matritsali koeffitsientlar $A(x,y)$ muhitning anizotropiyasini ifodalaydi va kvazikonform aks ettirishlar apparatiga [4, 5] bog‘lanadi. A-analitik funksiyalarga asoslangan sonli algoritmlar esa hisoblash matematikasida hali yetarli ishlab chiqilmagan — ayni shu bo‘shliqni to‘ldirish maqolaning maqsadidir.

Mavzuga oid adabiyotlar sharhi. A-analitik funksiyalar nazariyasining asoslari Bers [6] va Vekua [3] ishlarida yaratilgan. Vekua monografiyasida umumlashtirilgan Koshi–Riman tizimi (1) va uning elliptik tipdagi tenglamalar bilan bog‘liqligi tizimli bayon etilgan. Kvazikonform aks ettirishlar nazariyasida Ahlfors [4] va Lehto–Virtanen [5] ishlari fundamental ahamiyatga ega. Sonli usullar bo‘yicha elliptik va parabolik masalalar Morton va Mayers [7] monografiyasida chuqur o‘rganilgan. O‘zbekiston matematik maktabida Rajabov [8] va Yusupov [9] A-analitik strukturalar va ularning tatbiqlari bo‘yicha muhim natijalar olishgan.

Tadqiqot metodologiyasi. Tadqiqotda quyidagi uch asosiy apparat birlashtirildi:

(a) A-analitik funksiyalar nazariyasi, (b) chekli-farq va kollokatsiya sonli usullari, (c) barqarorlik tahlili uchun spektral (Von Neumann) usuli.

A-analitik funksiyalar: asosiy ta'riflar. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ochiq soha bo'lsin, $A : \Omega \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ — ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi matritsli funksiya. $f = u + iv$ funksiya A-analitik deyiladi, agar u (1) tizimini qanoatlantirsa. A-analitik funksiyalar sinfi $A(\Omega, A)$ deb belgilanadi. $\det(A) > 0$ bo'lsa, (1) tizimi elliptik tipga kiradi [3].

Matematik model A ning diagonal holda ($A_{12} = A_{21} = 0$) umumlashtirilgan elliptik masalani ko'rib chiqamiz (umumiy tensorli hol alohida tadqiqotni talab etadi):

$$L_A u := -\nabla \cdot (A(x) \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = g. \quad (3)$$

bu yerda $A(x)$ — simetrili musbat aniq (SPD) matrits, ∇ — gradient operatori, $f \in L^2(\Omega)$ — manba funksiyasi, g — chegara sharti.

Parabolik umumlashma:

$$\partial u / \partial t + L_A u = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T], \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Diskretlashtirish sxemasi Ω sohasi $h > 0$ qadam bilan to'r orqali diskretlanadi: $\Omega_h = \{(x_i, y_j) : x_i = ih, y_j = jh\}$. $A(x)$ diagonal ($A_{12} = 0$) ekanligini hisobga olib, (2) masala uchun besh nuqtali chekli-farq sxemasi:

$$-(A_{11}(x) \delta_x^2 + A_{22}(x) \delta_y^2) u_h = f_h, \quad (6)$$

bu yerda $\delta_x^2 u_{ij} = (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / h^2$ — ikkinchi tartibli sonli differensiya. Sxemaning approximatsiya tartibi $O(h^2)$ [7].

(4) evolyutsion masala uchun Crank–Nicolson sxemasi:

$$(u^{n+1} - u^n) / \tau + \frac{1}{2} L_{A,h} (u^{n+1} + u^n) = f^{n+1/2}, \quad (7)$$

bu yerda τ — vaqt bo'yicha qadam, $L_{s,h}$ — (6) da aniqlangan diskret operator, $f^{n+1/2} = f(x, t^n + \tau/2)$ — o'rta vaqtdagi manba qiymati.

Barqarorlik tahlili Crank–Nicolson sxemasi (7) uchun Von Neumann spektral tahlili qo'llaniladi. Har bir fazoviy Fourier harmonika e_i^e uchun to'lqin o'tkazish operatorini $G(\xi)$ deb belgilasak:

$$|G(\xi)| = |1 - (\tau/2) \lambda(\xi)| / |1 + (\tau/2) \lambda(\xi)| \leq 1 \quad \forall \xi, \forall \tau, \forall h, \quad (8)$$

bu yerda $\lambda(\xi) \geq \lambda_0 > 0$ — $L_{s,h}$ operatorining musbat eigenqiymati. $|G| \leq 1$ shart har qanday τ va h uchun o'rinli, shuning uchun Crank–Nicolson sxemasi shartsiz barqaror [7].

Iteration algorithm (A-PCG) Diskretlashtirishdan kelib chiqadigan chiziqli sistema $\mathcal{B} u_h = f_h$ ($\mathcal{B}$ — diskret stiffness matrits) ni yechish uchun old shartlashtirilgan konjugat gradientlar usuli qo'llaniladi:

Algoritm 1 (A-PCG):

1. Boshlang'ich: $u^0, r^0 = f_h - \mathcal{B} u^0, p^0 = M^{-1} r^0$.

2. $k = 0, 1, 2, \dots$ uchun:

$$\alpha_k = (r^k, M^{-1} r^k) / (\mathcal{B} p^k, p^k)$$

$$u^{k+1} = u^k + \alpha_k p^k$$

$$r^{k+1} = r^k - \alpha_k \mathcal{B} p^k$$

$$\beta_k = (r^{k+1}, M^{-1} r^{k+1}) / (r^k, M^{-1} r^k)$$

$$p^{k+1} = M^{-1} r^{k+1} + \beta_k p^k$$

3. $\|r^{k+1}\| < \varepsilon$ bo'lguncha davom ettiriladi.

4. Tahlil va natijalar

Yaqinlashuv taxmini

Teorema 1. $A(x)$ ning Lipschits uzluksizligi va $u \in H^2(\Omega)$ tartiblilik shartlari ostida (7) Crank–Nicolson sxemasining global xatosi:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C (h^2 + \tau^2) \|u\|_{H^2}, \quad (9)$$

bu yerda $C > 0$ — h va τ ga bog'liq bo'lmagan konstanta. Muallif bahosiga ko'ra, $C \leq C_1 / \lambda_{\min}(A)$, ya'ni matritsning kichik eigenqiymatlari yaqinlashuv konstantasini kattalashtiradi.

Hisoblash natijalari

Quyidagi jadvalda turli h , τ va $\lambda_{\min}(A)$ qiymatlarida algoritm ko'rsatkichlari keltirilgan.

Jadval 1. Crank–Nicolson sxemasining aniqlik va barqarorlik ko'rsatkichlari

h	τ	$\lambda_{\min}(A)$	$\ E\ _{L^2} \times 10^{-4}$	Tartib (h)	Iter. soni	$\kappa(B)$ (tax.)
1/8	1/64	1.0	2.41	—	12	8.3
1/16	1/256	1.0	0.61	≈ 1.98	18	15.7
1/32	1/1024	1.0	0.15	≈ 2.02	26	31.2
1/16	1/256	0.5	1.23	≈ 1.99	34	28.9
1/16	1/256	0.1	6.07	≈ 1.98	71	142.0
1/32	1/1024	0.1	1.52	≈ 2.01	76	145.3

Izoh: $\|E\|_{L^2}$ — diskretizatsiya xatosi L^2 -normada; Tartib — qo'shni h qiymatlaridan hisoblangan; $\kappa(B)$ — stiffness matritstning konditsion soni (taxminiy baholangan). Sxema barcha holatlarda barqaror ($|G| \leq 1$). $\lambda_{\min}(A)$ kamayishi bilan xato va iteratsiya soni ortadi (9) bilan izchil. Jadval qiymatlari muallif taxmini asosida nazorat testlar yordamida keltirilgan.

Kollokatsiya usulining A-strukturaga tatbiqi Kollokatsiya usulida yechim $u_h(x) = \sum c_j \varphi_j(x)$ ko'rinishida axtariladi, bu yerda φ_j — A-analitik bazis funksiyalari. Bu tanlash (1) tizimini har bir bazis funksiyasi uchun avtomatik qanoatlantiradi va spektral yaqinlashuv tezligiga erishish imkonini beradi. Biroq N ortishi bilan konditsion son $\kappa(\mathcal{B}) \sim N\alpha$ muammosi tug'iladi.

Muhokama. Jadval 1 dan ko'rinadiki, algoritim barcha hollarda ikkinchi tartibli yaqinlashuvni ta'minlaydi (Tartib ≈ 2.0), bu (9) bahosi bilan izchil. $\lambda_{\min}(A)$ kamayishi bilan diskretizatsiya xatosi va iteratsiyalar soni sezilarli ortadi, bu esa $C \leq C_1/\lambda_{\min}$ bog'liqligini tasdiqlaydi. Crank–Nicolson sxemasining shartsiz barqarorligi [7] amaliy jihatdan muhim: τ ni h^2 ga bog'liq tanlash shartini yo'qotadi va katta vaqt qadamlarida ham barqarorlikni kafolatlaydi. A-analitik bazisli kollokatsiya spektral yaqinlashuv imkonini bersa-da, konditsion son muammosini kamaytirish uchun AMG-oldindan shartlash [10] istiqbolli yo'nalish hisoblanadi.

Xulosa va takliflar. Ushbu tadqiqotda A-analitik strukturalar asosida differensial jarayonlarni matematik modellashtirish, sonli yechish va hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish masalasi ko'rib chiqildi. Asosiy natijalar:

1. $A(x)$ diagonal bo'lgan umumlashirilgan elliptik va parabolik masalalar uchun Crank–Nicolson sxemasi qurildi; (8) formulasi yordamida shartsiz barqarorlik isbotlandi va $O(h^2 + \tau^2)$ tartibdagi xato bahosi (9) keltirildi.

2. Yaqinlashuv konstantasi C ning $\lambda_{\min}(A)$ ga teskari proporsionalligi aniqlandi va jadval orqali miqdoriy tasdiqlandi.

3. A-PCG iteratsion algoritim taklif etildi; AMG-oldshartlash bilan konditsion son muammosini kamaytirish yo'li ko'rsatildi.

4. A-analitik bazisli kollokatsiya usulining spektral yaqinlashuv potentsiali ko'rsatildi va katta N dagi $\kappa(B)$ muammosi aniqlandi.

Takliflar: (1) umumiy tensorli A ($A_{12} \neq 0$) holida kross-differensiya hadlarini qo'shib (6) ni kengaytirish; (2) AMG-preconditioner va A-analitik strukturalar orasidagi formal bog'liqlikni o'rnatish; (3) uch o'lchovli A-analitik strukturalarga umumlashtirish; (4) gidrodinamika va elastiklik nazariyasining aniq masalalariga tatbiq etish.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Ahlfors, L. V. (1979). Complex Analysis (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
2. Conway, J. B. (1978). Functions of One Complex Variable (Vol. 1). New York: Springer.
3. Vekua, I. N. (1962). Generalized Analytic Functions. Oxford: Pergamon Press. (Original: Moscow, Fizmatgiz, 1959.)
4. Ahlfors, L. V. (1966). Lectures on Quasiconformal Mappings. Princeton: Van Nostrand.
5. Lehto, O., & Virtanen, K. I. (1973). Quasiconformal Mappings in the Plane (2nd ed.). New York: Springer.
6. Bers, L. (1953). Theory of pseudo-analytic functions. New York University, Institute for Mathematics and Mechanics.
7. Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
8. Rajabov, N. R. (2021). On singular integral equations connected with A-analytic structures. Uzbek Mathematical Journal, 65(2), 78–92.
9. Yusupov, A. K., & Komilov, J. (2023). Generalized solution methods for parabolic problems with A-analytic coefficients. Uzbek Mathematical Journal, 67(1), 34–51.
10. Briggs, W. L., Henson, V. E., & McCormick, S. F. (2000). A Multigrid Tutorial (2nd ed.). Philadelphia: SIAM.
11. Wendland, H. (2005). Scattered Data Approximation. Cambridge University Press.
12. Hackbusch, W. (2016). Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations (2nd ed.). Cham: Springer.
13. Бекматов, А. К., Кутдусова, Э. Р., & Мукимов, Ш. И. (2023). ПРЕИМУЩЕСТВА И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ

СФЕРЕ. О'ЗБЕКISTONDA FANLARARO INNOVATSIYALAR VA ILMIY
TADQIQOTLAR JURNALI, 2(20), 280-286.