УДК 517.956.6

Муталлиев Н.Н., Мирзамахмудов У.А.,

Наманган муҳандислик-технология институти

«Олий математика» кафедраси ассистенти

Наманган, Узбекистон

ПАРАБОЛО –ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН НОЛОКАЛ ВА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАСИ

Аннотация. *Ушбу мақолада аралаш типдаги параболо-гиперболик иккинчи тур тенглама учун Трикоми масаласи баён қилинган ва масаланинг бир қийматли ечимини ўрганилган. Масаланинг ечими параболик соҳада биринчи чегаравий масала ечими сифатида, гиперболик соҳада эса кўриниши ўзгарган Коши масаланинг ечими сифатида изланган.*

Калит сўзлар: *параболо-гиперболик типдаги тенглама, аралаш соҳа, Трикоми масаласи, Коши масаласи, биринчи чегаравий масала.*

Муталлиев Н.Н., Мирзамахмудов У.А.,

ассистенты кафедры «Высшая математика»

Наманганский инженерно-технологический институт

Наманган, Узбекистан

НЕЛОКАЛЬНАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ.

Аннотация. *В данной статье исследуется задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа в смешанной области. Решение задачи в гиперболической подобласти находится как решение задачи Коши, а в параболической подобласти как решение первой краевой задачи.*

Ключевые слова: *уравнение параболо-гиперболического типа, смешанная область, задача Трикоми, задача Коши, первая краевая задача.*

1. Масаланинг қўйилиши.

Ушбу

$$0 = \begin{cases} L_1(u) \equiv u_{xx} + u_y, & y > 0 \\ L_2(u) \equiv u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y, & y < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

тенгламани $D = D_1 \cup D_2 \cup AB$ соҳада қарайлик, бу ерда D_1 қуйидаги чизиқлар $AA_1: x = 0$, $A_1B_1: y = 1$, $BB_1: y = 0$, $AB: y = 0$ билан чегараланган соҳа, D_2 - (1) тенгламанинг характеристикалари $AB: y = 0$, $AC: x - 2\sqrt{-y} = 0$, $BC: x + 2\sqrt{-y} = 1$ билан чегараланган соҳа, $n \in N$.

Такидлаш жоизки, гиперболик қисми $L_2(u) = 0$ тенгламадан иборат бўлган эллиптико-гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи [1,2] ишларда ўрганилган. [3] ишда эса ушбу тенглама учун Франкль масаласи ўрганилган. [4, 5, 6] ишларда гиперболик қисми

$$L_a(u) \equiv u_{xx} + y u_{yy} + a u_y = 0$$

тенгламадан иборат бўлган аралаш типдаги эллиптико –гиперболик тенглама учун Трикоми масаласи ўрганилган. [7] ишда гиперболик қисми $L_a(u) = 0$ тенгламадан иборат бўлган параболо –гиперболик типдаги тенглама учун Трикоми масаласи ўрганилган. Биз ушбу ишимизда юқорида санаб ўтилган ишларнинг мантиқий тўлдирувчиси сифатида қуйидаги масалани ўрганамиз.

Трикоми масаласи. Қуйидаги шартларни ва (1) тенгламани қаноатлантирувчи $u(x,y) \in C(\overline{D})$ функция топилсин:

$$u|_{AC} = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1/2, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \psi_0(y),\quad u(1,y) = \psi_1(y),\ \forall y \in [0,1], \tag{3}$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{1/2-n} \left[u - A^-_{n+1/2}(\tau)\right]_y = \lim_{y \to +0} u(x,y),\ \forall x \in (0,1), \tag{4}$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \psi_0^{(k)}(0) = 0,\ k = \overline{0,..,2n} \tag{5}$$

бу ерда $\varphi(x), \psi_0(y), \psi_1(y)$ - берилган функциялар, $\tau(x) = u(x,0)$,

$$A^-_{n+1/2}(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!(2n-k)!2^{2k}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!(2n)!} \left[\tau^{(k)}\left(x - 2\sqrt{-y}\right) + (-1)^k \tau^{(k)}\left(x + 2\sqrt{-y}\right)\right].$$

2. **Асосий қисм.** (1) тенглама учун қўйилган

$$u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{1/2-n}\left[u-A^{-}_{n+1/2}(\tau)\right]_y=\nu(x),\ 0<x<1$$

шартлардан иборат кўриниши ўзгарган Коши масаласининг ечими [1]

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!2^{2k-1}(-y)^{k/2}}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}\left(x-2\sqrt{-y}\right)+(-1)^k\tau^{(k)}\left(x+2\sqrt{-y}\right)\right]+$$

$$-\frac{2(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}(-y)^{n+1/2}\int_0^1\nu\left[x-2\sqrt{-y}(1-2z)\right]\left[z(1-z)\right]^n dz \qquad (6)$$

дан иборат. Трикоми масаласининг D_2 соҳадаги ечимини (6) функция сифатида қидирамиз. (6) функцияни (2) шартга бўйсиндириб, $\tau(x)$ ва унинг ҳосилаларига нисбатан қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(2n-k)!2^{k-1}x^k}{k!(n-k)!(2n)!}\left[\tau^{(k)}(0)+(-1)^k\tau^{(k)}(2x)\right]+$$

$$-\frac{2(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^{n+1/2}\int_0^1\nu(2xz)\left[z(1-z)\right]^n dz=\varphi(x),\ 0\le x\le 1/2. \qquad (7)$$

(7) тенгламада x ни $x/2$ билан алмаштириб, $n+1$ марта ҳосила олиб, қуйидагига эга бўламиз [1]:

$$\tau^{(2n+1)}(x)=4^{2n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^2\nu(x)+\frac{(2n)!}{2^n n!}(-1)^n x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2),\ 0\le x\le 1. \qquad (8)$$

(5) шартдан $\tau^{(k)}(0)=0, k=\overline{0,..2n}$ экани келиб чиқади. Буни эътиборга олган ҳолда (8) тенгламанинг ҳар иккала тамонига D_{0x}^{-1-2n} операторни қўллаб

$$\tau(x)=-4^{2n}\left[\frac{(2n)!}{n!}\right]^2 D_{0x}^{-1-2n}\nu(x)+\frac{(2n)!}{2^n n!}(-1)^{n+1}D_{0x}^{-1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right]0\le x\le 1. \qquad (9)$$

$\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги биринчи муносабатни оламиз.

Энди D_1 соҳадан асосий функционал муносабатларни олиш мақсадида $L_1(u)=0$ тенгламадан ва (3) шартлардан $y\to+0$ да лимитга ўтамиз. Натижада,

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\; u(0,0)=\psi_0(0),\; u(1,0)=\psi_1(0) \qquad (10)$$

муносабатларни оламиз. Демак, Трикоми масаласи, ечимга эга бўлиш маъносида, {(9), (10)} тенгламалар системасига эквивалент экан. Чунки, агар бу системадан $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функцияларни бир қийматли топсак, Трикоми масаласининг ечими D_2 соҳада (6) формула билан, D_1 соҳада эса $L_1u=0$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими

$$u(x,y)=\int_0^1\tau(\xi)G(\xi,0;x,y)d\xi+\int_0^y\psi_0(\eta)G_\xi(0,\eta;x,y)d\eta-\int_0^y\psi_1(\eta)G_\xi(1,\eta;x,y)d\eta$$

сифатида топилади [9], (9) муносабатдан икки марта ҳосила олиб (10) муносабатга қўйсак

$$\nu(x)-\lambda\int_0^x(x-t)^{2n-2}\nu(t)dt=\mu D_{0x}^{1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right],\; x\in[0,1] \qquad (11)$$

$\nu(x)$ га нисбатан 2-тур Волтерра интеграл тенгламасини ҳосил қиламиз, бу ерда

$$\lambda=4^{2n-1/2}n(2n-1)(2n)!/(n!)^2,\; \mu=(-1)^{n+1}(2n)!n(2n-1)/\left(2^{n-1}n!\right).$$

1-теорема. Агар $x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)$ функция $[0,1]$ кесмада интегралланувчи бўлса, (11) иккинчи тур Волтерра интеграл тенгламаси ягона

$$\nu(x)=\mu D_{0x}^{1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right]+\mu\int_0^x zE_{2n-1,2n-1}(z)D_{0t}^{1-2n}\left[t^{-n}\varphi^{(n+1)}(t/2)\right]dt \qquad (12)$$

ечимга эга бўлади.

Исбот. Агар $x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)$ функция $[0,1]$ кесмада интегралланувчи бўлса, $D_{0x}^{1-2n}\left[x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)\right]\in C[0,1]$ бўлади. Бундан (11) тенглама ядроси ва ўнг тарафи узлуксиз бўлган иккинчи тур Волтерра интеграл тенгламаси эканлиги келиб чиқади. Интеграл тенгламалар назариясидан (11) тенглама ягона ечимга эга.

Ушбу тенгламани кетма- кет яқинлашиш усули билан ечамиз. Итерацияланган ядроларни ва резолвентани тузамиз:

$$K_1(x,t)=(x-t)^{2n-2},\; K_2(x,t)=\int_t^x(x-s)^{2n-2}(s-t)^{2n-2}ds=\frac{\left[(2n-1)!\right]^2}{(4n-2)!}(x-t)^{4n-3},$$

$$K_3(x,t)=\frac{\left[(2n-1)!\right]^2}{(4n-2)!}\int_t^x (x-s)^{2n-2}(s-t)^{4n-3}\,ds=\frac{\left[(2n-1)!\right]^3}{(6n-3)!}(x-t)^{6n-4}.$$

Умуман

$$K_m(x,t)=\frac{\left[(2n-1)!\right]^m}{(2mn-m)!}(x-t)^{2mn-m-1}.$$

Энди $R(x,t;\lambda)$ резолвентани тузамиз

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}K_m(x,t)=(2n-1)!(x-t)^{2n-2}E_{2n-1,2n-1}(z),$$

бу ерда, $z=\lambda(2n-1)!(x-t)^{2n-2}$, $E_{2n-1,2n-1}(z)$-Миттаг-Леффлер функцияси [8]. Ҳосил қилинган резолвентадан фойдаланиб (11) тенгламанинг ягона ечими (12) ни ёзиб оламиз.

1-теорема исбот бўлди.

$\nu(x)$ нинг (12) кўринишини (9) [ёки (10)] тенгламага қўйиб $\tau(x)$ ни бир қийматли топиб оламиз.

Шундай қилиб биз ушбу теоремани исботладик.

2-теорема. Агар $x^{-n}\varphi^{(n+1)}(x/2)$ функция $[0,1]$ кесмада интегралланувчи бўлиб (5) шарт бажарилса, Трикоми масаласи ягона ечимга эга бўлади.

Адабиётлар

1. Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнения смешанного типа. Казань: Издательство Казанского университета, 1986. -148 с.
2. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. - Казань: Издательство Казанского университета, 2015. -236 с.
3. Хайруллин Р. С., Аналог задачи Франкля для уравнения второго рода, Изв.вузов. Матем., 2002, № 4. С. 59–63
4. Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. Сердика Бълг. Мат.списание. 1977. Т. 3. № 3. С. 181-188.
5. Хайруллин Р. С. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа второго рода в случае нормальной области. Дифференц. уравнения, 1990, Т 26, № 8, 1396–1407
6. Salahitdinov M.S., Mamadaliev N.K. Tricomi problem for the elliptic-hyperbolic equation of the second kind // The Journal of the Korean Mathematical Society (JKMS). – 2011. – Vol. 19. – №. 2. – P. 111-127.