

DIFFERENSIAL HISOB METODLARINING TATBIQIGA OID BA'ZI MASALALAR

Soatov Ulugbek Abdukadirovich
Jizzax politexnika instituti dotsenti, f-m.f.n.
O'zbekiston Respublikasi, Jizzax shahri

Annotatsiya: Ushbu maqolada hosila tatbiqlariga oid turli mazmundagi ba'zi masalalar, jumladan ekstremal masalalar (maksimum va minimum masalalari), funksiyalarning ekstremal va boshqa xossalardan foydalanish orqali yechiladigan masalalar hamda turli xil tengsizliklarni isbotlash masalalari, ularni yechish usullari qaraladi.

Kalit so'zlar: funksiya hosilasi, funksiya monotonligi, funksiya qavariqligi, masala, tenglama, tengsizlik, nostandart masala, ildiz, butun qiymat, eng katta qiymat, yechim.

SOME ISSUES ON THE APPLICATION OF DIFFERENTIAL CALCULUS METHODS

Soatov Ulugbek Abdukadirovich

Associate Professor of Jizzakh Polytechnic Institute, Ph.D

Annotation: This article discusses some problems of various content related to applications of the derivative, including extremal problems (maximum and minimum problems), problems solved using extremal properties, quarks, and other properties of functions, as well as problems of proving various inequalities and methods for solving them.

Keywords: derivative of a function, monotonicity of a function, convexity of a function, problem, equation, inequality, non-standard problem, root, integer value, maximum value, solution.

Hozirgi davrda uzluksiz ta'limning eng muhim vazifalaridan biri shaxs tarbiyasida yangicha yondashuvni tashkil etishdir. Matematikaga iqtidorli o'quvchi va talabalarda matematik qobiliyatlarni va izlanuvchanlikni o'stirib borish barcha fanlarni o'zlashtirishda muhim o'rin tutadi. Bunda turli mazmundagi qiyinlik darajasi yuqoriroq matematik masalalarni yechishda mavjud bilimlardan foydalana bilish, ulardagi ijodkorlikni rivojlantiradi.

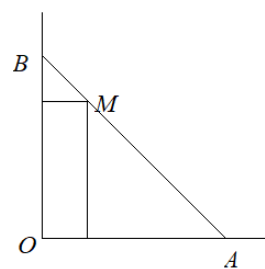
Xususan, hosila tushunchasi tatbiqlari yordamida turli mazmundagi ko'p masalalarni, jumladan murakkab masalarni yecha bilish - ta'lim oluvchilarning differensial hisob elementlaridan masalalarni yechishda keng foydalana olish ko'nikma va malakalarini shakllanganligini hamda matematik savodxonligini ko'rsatadi. Ushbu maqolada hosila tatbiqlariga oid ba'zi masalalar va ularni yechish metodlarini o'ganiladi.

1-masala. Sistemani yeching:

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = u \\ u^3 + 2u^2 + 2u = z \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x \end{cases}.$$

Yechish. $f(t) = t^3 + 2t^2 + 2t$ funksiyani qaraymiz. t ning ixtiyoriy qiymatida uning hosilasi $f'(t) = 3t^2 + 4t + 2 > 0$ bo'lganligi uchun $f(t)$ o'suvchi. Sistema $u = f(x)$, $z = f(u)$, $x = f(z)$ ko'rinishga ega, ya'ni $x = f(f(f(x)))$. Teorema ko'ra, x $f(x) = x$ tenglamani qanoatlantiradi yoki $x^3 + 2x^2 + 2x = x$, $x(x+1)^2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Demak, $(0; 0; 0)$ va $(-1; -1; -1)$ uchliklar sistemaning yechimlaridir.

2-masala. Uchlari to'g'ri burchak tamonlarida bo'lgan kesma shu burchak tamonlaridan 1 va 8 birlik masofalarda uzoqlashgan nuqtaga ega. Bunday kesmaning eng kichik uzunlikdagi toping.



Yechish. Faraz qilaylik $OA = x$, $OB = y$ (1-rasm). x va y larning o'zaro bog'liqligini mos uchburchaklar o'xshash-ligidan hosil qilish mumkin, shuningdek, $S_{OBA} = S_{OMA} + S_{OMB}$ tenglikka ko'ra $xy = 8x + y$.

Bundan $y = \frac{8x}{x-1}$ yoki Pifagor teoremasiga ko'ra

$$AB^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2}. \quad \text{Masalani yechish uchun } f(x) = x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2} \text{ funksiyaning}$$

eng kichik qiymatini topishimiz kerak bo'ladi. Bu funksiya hosilasini topib, uni

nolga tenglaymiz. Natijada $f'(x) = 2x + \frac{128x(x-1)^2 - 128x^2(x-1)}{(x-1)^4} = 0$ va uni ixchamlab

$(x-1)^3 = 64$ yoki $x = 5$ ga ega bo'lamiz. U holda $f(x)$ funksiyaning eng kichik qiy-

$$\text{mati } AB^2 \text{ ga tengligidan } AB^2 = \left(x^2 + \frac{64x^2}{(x-1)^2} \right)_{x=5} = 25 + \frac{64 \cdot 25}{16} = 125. \quad \text{Bundan } AB = 5\sqrt{5}$$

eng kichik uzunlikdagi kesmani topamiz.

3-masala. R - radiusli doiradan sektor qir qilgan va sektordan konus hosil qilingan. Hosil qilingan konus po'kakning eng katta hajmi qanday?

Yechish: Sektorning markaziy burchagi – α , konus asosi radiusi – r bo'lsin.

$R\alpha = 2\pi r$ (asos aylanasi uzunligi sektor yoyiga teng) tenglikdan $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$ ni topamiz.

Konus yasovchisi R bo'lganligi uchun uning uzunligi $R\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$, hajmi esa

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{R^3\alpha^2}{4\pi^2} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ ga teng. Masala α - ning funksiyasi bo'lgan $y = \alpha^2 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$

yoki $y^2 = \alpha^4 - \frac{\alpha^6}{4\pi^2}$ funksiyaning eng katta qiymatini topishga keltiriladi. α - bo'yi-cha **hosilani** hisoblaymiz va uni nolga tenglab quyidagilarga ega bo'lamiz.

$4\alpha^3 - \frac{6\alpha^5}{4\pi^2} = 0$, bundan $\alpha^2 = \frac{8}{3}\pi^2$ yoki $\alpha = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ va natijada

$V = \frac{1}{3}\pi \frac{R^3 \frac{8}{3}\pi^2}{4\pi^2} \sqrt{1 - \frac{\frac{8}{3}\pi^2}{4\pi^2}} = \frac{8}{9}R^3\pi \frac{\sqrt{4 - \frac{8}{3}}}{2} = \frac{8}{9}\pi R^3 \frac{2\frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{8}{9\sqrt{3}}\pi R^3$ ni hosil qilamiz.

4-masala. Tenglamani yeching: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.

Yechish. Ushbu tenglamani yechish uchun $a_1a_2 + b_1b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ tengsizlikdan foydalanamiz. Bu tengsizlikning geometrik ma'nosi quyidagicha: ikki $\vec{c}(a_1, b_1)$ va $\vec{d}(a_2, b_2)$ vektorlar skalyar ko'paytmasi ular modullari (uzunliklari) ko'paytmasidan oshmaydi. Ushbu tengsizlik umumiy holdagi Koshi-Bunyakovskiy tengsizligining $n=2$ dagi xususiy holi hisoblanadi [3]. Tengsizlikdagi tenglik $\vec{c}(a_1, b_1)$ va $\vec{d}(a_2, b_2)$ vektorlar kollinear bo'lgan holda bajariladi.

Mazkur tengsizlikka ko'ra,

$x\sqrt{1+x} + 1\sqrt{3-x} \leq \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{(1+x)+(3-x)} = 2\sqrt{1+x^2}$ ga ega bo'lamiz.

Demak, $\vec{n}(x; 1)$ va $\vec{m}(\sqrt{1+x}; \sqrt{3-x})$ vektorlar kollinear, yani $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

Bundan, $x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1}$, $x^3 - 3x + x + 1 = 0$ yoki

$(x-1)(x^2-2x-1)=0$, $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$, $x_3=1-\sqrt{2}$ (oxirgi ildiz chet ildiz).

5-masala. Tenglamani yeching: $\log_{6-x}\log_2 x = \log_{7-x}\log_2(2x)$.

Yechish. Berilgan tenglamani shakl almashtiramiz: $\frac{\lg \log_2 x}{\lg(6-x)} = \frac{\lg(\log_2 x + 1)}{\lg(7-x)}$

yoki

$$\frac{\lg(7-x)}{\lg(6-x)} = \frac{\lg(\log_2 x + 1)}{\lg \log_2 x} \quad \text{yoki} \quad \log_{(6-x)}(7-x) = \log_{\log_2 x}(\log_2 x + 1).$$

$f(t) = \log_t(t+1)$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiyaning $t > 1$ da monoton kamayuvchi ekanligini ko'rsatamiz. Buni quyidagi usulda bajarish mumkin:

$f(t) - 1 = \log_t(t+1) - 1 = \log_t\left(1 + \frac{1}{t}\right)$. Natijada hosil bo'gan $\log_t\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ funksiya kamayuvchi funksiya iborat (ya'ni asos o'sadi, logarifm belgisi ostidagi funksiya kamayadi).

Qaralayotgan tenglamamiz $f(6-x) = f(\log_2 x)$ ko'rinishga ega va demak $\log_2 x = 6-x$ tenglikdan chapda o'suvchi, o'ngda kamayuvchi funksiya turganligi uchun yechim yagona: $x = 4$.

6-masala. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ tenglamani yeching.

Yechish. Masalani yechish quyidagi teorema asoslanadi.

Teorema. Agar $y \in f(x)$ funksiya monoton o'suvchi bo'lsa, u holda

$$f(x) = x \quad (1) \quad \text{va} \quad f(f(x)) = x \quad (2)$$

tenglamalar ekvivalent [1-2].

Isbot. (2) tenglama (1) tenglamaning natijasi bo'lganligi uchun (1) ning har qanday yechimi (2) ni qanoatlantirishi ravshan. (Agar $f(x_0) = x_0$ bo'lsa, u holda $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$). (2) tenglamaning har qanday yechimi (1) ni qanoatlantirishini isbotlaymiz. x_0 shunday bo'lsinki, $f(f(x_0)) = x_0$ o'rinli bo'lsin. Faraz qilaylik, $f(x_0) \neq x_0$ va aniqlik uchun $f(x_0) > x_0$ bo'lsin. U holda

$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$ bo'lib, bu $f(f(x_0)) = x_0$ farazimizga qarama-qarshidir. Teorema isbotlandi.

Izoh: Agar $y=f(x)$ monoton o'suvchi bo'lsa, u holda ixtiyoriy k da $f_k(f_k(x)) = x$ va $f(x) = x$ tenglamalar ekvivalent.

Tenglamada shakl almashtiramiz: $\frac{1 + \left(\frac{x^3 + 1}{2}\right)^3}{2} = x$. Berilgan tenglama $f(f(x)) = x$

ko'rinishga ega, bunda $f(x) = \frac{1+x^3}{2}$ bo'lib,

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1+x^3}{2}\right) = \frac{1 + \left(\frac{1+x^3}{2}\right)^3}{2} = x.$$

Teorema asosan unga ekvivalent $\frac{1+x^3}{2} = x$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan,

$$x^3 + 2x + 1 = 0, (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Xulosa. Differensial hisob metodlari, funksiyaning ekstremal xossalari va ulaning tatbiqlariga oid tushunchalarni yaxshi o'zlashtirgan iqtidorli o'quvchi va talabalar muntazam ravishda ushbu maqolada o'rganilgan ba'zi qiyinroq masalalarni hamda mustaqil ravishda turli mazmundagi masalalarni [4-6] yechish bilan shug'ullanib, o'z bilimlarini mustahkamlab borishlari orqali mavzu doirasi-dagi ko'plab konkurs masalalarini yecha olish ko'nikma va malakalariga ega bo'lishadi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. В.С.Крамор. «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа», //Учебное пособие//, Москва, «Просвещение», 1990.
2. И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев. “Факультативный курс по математике”. Решение задач. Москва, “Просвещение”, 1991 г.
3. С.М.Никольский «Курс математического анализа», Москва, «Наука», 1990.

4. Г.И.Зубелевич “Сборник задач московских математических олимпиад”
Издательство “Просвещение” Москва – 1971 г.
5. Soatov, U. A. (2022). Tenglamalarni yechishning grafik usuli haqida. *Science and Education*, 3(8), 7-12.
6. Abdug'aniyevich, D. U. B. (2022). Parametrli logarifmik tenglamalarni yechish usullariga oid ba'zi masalalar. *pedagogs jurnali*, 5(1), 8-16.