

TENGSIKLIKLANI ISBOTLASHNING BA'ZI USULLARI HAQIDA

Soatov Ulugbek Abdukadirovich

Jizzax politexnika instituti dotsenti, f-m.f.n.

O'zbekiston Respublikasi, Jizzax shahri

Annotatsiya: Amaliyotda ko'pincha tengsizliklarni isbotlash masalalari uchraydi. Bunda tengsizlikka qo'shimcha ravishda, undagi o'zgaruvchining ma'lum qiymatlari to'p-lami ko'rsatiladi va uning barcha elementlari tengsizlik yechimlari to'plamiga tegishli ekanligini isbotlash talab qilinadi. Ushbu maqolada turli xil tengsizliklarni isbotlash masalalari hamda ularni isbotlashning ba'zi usullari qarang.

Kalit so'zlar: Tengsizlik, tengsizliklarni isbotlash masalalari, o'zgaruvchi miqdor, teng kuchli almashtirishlar usuli, baholash usuli, yechimlar to'plami, natural, musbat va haqiqiy qiymatlar, son o'qi, oraliq.

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА НЕРАВЕНСТВ

Соатов Улугбек Абдукадилович

Джизакский политехнический институт, доцент, к.ф-м.н.

Аннотация: На практике часто встречаются задачи доказательства неравенств. При этом помимо неравенства, указывается множество определенных значений переменной в нем и требуется доказать, что все его элементы принадлежат множеству решений неравенства. В статье рассматриваются вопросы доказательства различных неравенств и некоторые методы их доказательства.

Ключевые слова: Неравенство, задачи на доказательство неравенств, переменная величина, метод эквивалентных замен, метод оценки, множество решений, натуральные, положительные и действительные числа, числовая прямая, интервал.

ON SOME METHODS OF PROVING INEQUALITIES

Soatov Ulugbek Abdukadirovich,

Jizzakh Polytechnic Institute, Associate Professor, Ph.D.,

Republic of Uzbekistan, Jizzakh city

Annotation: In practice, problems of proving inequalities are often encountered. In this case, in addition to the inequality, a set of certain values of the variable in it is indicated and it is required to prove that all its elements belong to the set of solutions of the inequality. The article considers the issues of proving various inequalities and some methods of proving them.

Keywords: Inequality, problems on proving inequalities, variable quantity, method of equivalent substitutions, evaluation method, solution set, natural, positive and real numbers, number line, interval.

Matematikaga layoqatli ta'lim oluvchlar bilimlarini tatbiqiy mustahkamlashga oid murakkab masalalarni o'rganib borishlari matematika va boshqa sohalarda yaxshi natijalarga erishishlariga yordam beradi. Jumladan, tengsizliklarni isbotlashga oid masalalarni yechishda boshlang'ch analiz asoslari, shuningdek, algebraik yechish usullari [1-2] bo'yicha umumiy tasavvurga ega bo'lish hamda ulardan ongli va malakali foydalanishni bilish talab etiladi.

Amaliyotda ko'pincha tengsizliklarni isbotlash masalalari uchraydi. Bunda tengsizlikka qo'shimcha ravishda, undagi o'zgaruvchining ma'lum qiymatlari to'plami ko'rsatiladi va uning barcha elementlari tengsizlik yechimlari to'plamiga tegishli ekanligini isbotlash talab qilinadi. Odatda bunday masalalar tengsizliklarni isbotlash masalalari deb ataladi.

Agar tengsizlikni isbotlash masalasida o'zgaruvchining qiymatlari to'plami ko'rsatilmagan bo'lsa, u holda bu hol, o'zgaruvchining barcha haqiqiy qiymatlari uchun tengsizlikning to'g'riligini ko'rsatish kerakligini anglatadi. Bunday masalalarni yechish uchun turli xil yo'llar va usullar qo'llaniladi. Tengsizlikda qatnashayotgan o'zgaruvchi yoki parametr natural sonlar to'plamiga

tegishli bo'lgan holda matematik induksiya usuli ko'pincha muvaffaqiyatli qo'llanilishi mumkin. Ushbu maqolada tengsizliklarni isbotlashning boshqa usullarini o'rganishni maqsad qilindi.

Ba'zan tengsizlikni teng kuchli almashtirishlar yordamida bajarilishi aniq (ravshan) tengsizlikka keltirish orqali isbotlashga erishiladi.

Teng kuchli almashtirishlar usulini quyidagi misollarda o'rganamiz.

1-misol. O'zgaruvchining hamma musbat qiymatlarida tengsizlik to'g'riligini isbotlang:

$$10x^3 - 9x^2 + 9x + \frac{1}{10} > 0.$$

Isbot. Tengsizlikni quyidagichi shkl almashtiramiz:

$$x(10x^2 - 9x + 9) + \frac{1}{10} > 0,$$

$$x\left(\left(\sqrt{10}x - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + 9 - \frac{81}{40}\right) + \frac{1}{10} > 0,$$

$$x\left(\left(\sqrt{10}x - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \frac{279}{40}\right) + \frac{1}{10} > 0.$$

Bu hosil bo'lgan tengsizlik x o'zgaruvchining $x > 0$ qiymatlarida o'rinli bo'lishi ko'rinib turibdi. Shu bilan birga oxirgi tengsizlik berilgan tengsizlikka teng kuchli. Va, berilgan tengsizlik isbotlandi.

2-misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$x^2 - y^2 - xy - x - y + 1 \geq 0.$$

Isbot. Berilgan tengsizlikdan quyidagicha shakl almashtirish orqali

$$2x^2 - 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0,$$

$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0,$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlik x va y o'zgaruvchilarning hamma qiymatlarida o'rinli ekanligi ravshan, chunki bajarilgan almashtirishlar natijasida tengsizliklar teng kuchliligi saqlanadi.

Shunday tengsizliklar ham borki, ularni bir vaqtda x o'zgaruvchining barcha qiymatlarida bajarilishi aniq (ravshan) tengsizlik ko'rinishiga keltirib bo'lmaydi. Lekin uning bajarilishini son o'qini oldindan ajratilgan oraliqlarning har birida ko'rsatish orqali isbotlash mumkin. Bu holni ushbu misolda ko'ramiz.

3-misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$x^8 - x^5 - x^2 - x + 1 > 0.$$

Isbot. Son o'qini uchta oraliqqa ajratamiz:

$$(-\infty, +\infty) = (-\infty, 0] \cup (0, 1) \cup [1, +\infty).$$

1) $(-\infty, 0]$ oraliqda tekshiramiz:

$$x^8 - x^5 - x^2 - x + 1 > 0$$

tengsizlikning bajarilishi aniq, chunki uning chap tomonidagi birinchi to'rtta qo'shiluvchilar manfiy.

2) $(0, 1)$ oraliqda tengsizlik o'rinli bo'lishini uning chap tomonini guruhlash orqali aniqlaymiz:

$$x^8 - x^5 - x^2 - x + 1 > 0, \quad x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0.$$

Bu tengsizlik ixtiyoriy $x \in (0, 1)$ qiymatlarda bajariladi.

3) Va, nihoyat uchunchi $[1, +\infty)$ oraliqda berilgan tengsizlikni

$$x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$$

ko'rinishga keltiramiz. Bu tengsizlik qaralayotgan oraliqdagi barcha nuqtalarda o'rinli ekanligi ravshan.

Shunday qilib, berilgan tengsizlik x o'zgaruvchining hamma haqiqiy qiymatlarida o'rinli ekanligi isbotlandi.

Tengsizliklarni isbotlash usullaridan yana biri baholash usuli hisoblanadi. Bu usulni quyidagi misollarda o'rganamiz.

4-misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Isbot. Tengsizlikning chap tomoni n ta qo'shiluvchidan iborat bo'lib, ularning har biri oxirgi qo'shiluvchidan kichikmas. Shuning uchun tengsizlikning chap qismini quyidan bunday baholaymiz:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tengsizlik isbotlandi.

5-misol. Tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1$$

Isbot. Tengsizlikning chap tomoni har bir qo'shiluvchisini yuqoridan quyidagicha baholaymiz:

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Va, natijada tengsizlik chap qismi

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n},$$

kabi baholanadi. Bu esa berilgan tengsizlik to'g'riligini isbotlaydi.

Xulosa. Matematikaga iqtidorli ta'lim oluvchilar, magistrlar va talabalar maqolada keltirilgan masalalar va tengsizliklarni isbotlash usullarini o'rganib, quyida keltirilgan adabiyotlar asosida turli mazmundagi algebraik, geometrik va analizga oid tengsizliklarni va boshqa masalalar, ularni yechish usullari bo'yicha yetarlicha ko'p ma'lumotlarni o'rganishlari mumkin. Shu tarzda olingan nazariy va amaliy bilimlar mustahkamlanib boradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1.T.Tolaganov, A.Normatov "Matematikadan praktikum", Pedagogika instituti talabalari uchun o'quv qo'llanma, "O'qituvchi", 1989 yil.

2.И.Ф.Шарыгин, В.И. Голубев. Факультативный курс по математике решение задач. Москва, «Просвещение», 1991.