OPTIMAL KVADRATUR FORMULALARNI GILBERT FAZOSI VA DIFFERENSIALLANUVCHI FUNKSIYALAR FAZOSIDA QURISH

Nizomitdinova Nozimaxon Rustambek qizi
Farg'ona davlat universiti, Amaliy matematika mutaxassisligi 2-kurs magistranti
Abduqaxxorova Muborak Abduhalil qizi
Farg'ona davlat universiti, Amaliy matematika mutaxassisligi 2-kurs magistranti

Annotatsiya: Ushbu maqolada Gilbert fazosi va differensiallanuvchi funksiyalar fazosida optimal kvadratur formulalarni qurish masalasi o'rganilgan. Kvadratur formulaning xatolik funksionali Riss teoremasi yordamida hisoblanib, uning normasi kvadratining analitik ifodasi topilgan. Lagranj ko'paytuvchilar usuli qo'llanilib, optimal koeffitsientlar aniqlangan. Xatolik normasining kvadrati $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^{8}$ ga tengligi isbotlangan. Sonli tajribalar natijasida qurilgan formulaning klassik Eyler–Makloren formulasiga nisbatan aniqroq ekanligi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: optimal kvadratur formula, Gilbert fazosi, Sobolev fazosi, xatolik funksionali, Riss teoremasi, Lagranj ko'paytuvchilari, Eyler–Makloren formulasi, differensiallanuvchi funksiyalar.

CONSTRUCTION OF OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS IN HILBERT SPACE AND THE SPACE OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Nozimaxon Nizomitdinova
2nd-year Master's student in Applied Mathematics, Fergana State University
Muborak Abduqaxxorova
2nd-year Master's student in Applied Mathematics, Fergana State University

Abstract: This paper investigates the problem of constructing optimal quadrature formulas in Hilbert space and the space of differentiable functions. The error functional of the quadrature formula is evaluated using the Riesz representation theorem, and an analytic expression for the square of its norm is derived. The method of Lagrange multipliers is applied to determine the optimal coefficients. It is proven that the square of the error norm is equal to $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^{8}$. Numerical experiments demonstrate that the constructed formula is more accurate than the classical Euler–Maclaurin formula.

Keywords: optimal quadrature formula, Hilbert space, Sobolev space, error functional, Riesz representation theorem, Lagrange multipliers, Euler–Maclaurin formula, differentiable functions.

KIRISH. Integrallarni taqribiy hisoblash masalasi hisoblash matematikasining asosiy yo‘nalishlaridan biridir. Bunday hisoblashlarda kvadratur formulalar keng qo‘llaniladi. Kvadratur formulaning aniqligi uning koeffitsientlari va tugun nuqtalarini tanlashga bog‘liq. Optimal kvadratur formulalarni qurish deganda, ma’lum bir funksiyalar sinfi uchun xatolikni eng kichik qiymatga keltiruvchi formulani topish tushuniladi. Bu masalada Gilbert fazosi va differensiallanuvchi funksiyalar fazosi alohida o‘rin tutadi, chunki bunday fazolarda skalyar ko‘paytma va norma tushunchalari yordamida xatolikni aniq ifodalash va minimallashtirish mumkin bo‘ladi.

Masalaning qo‘yilishi: Faraz qilaylik, integrallash kesmasi [0, 1] bo‘lib, unda f(x) funksiya berilgan. Ushbu funksiyaning aniq integralini taqriban hisoblash uchun quyidagi umumiy kvadratur formulani qaraymiz:

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} C_k f(x_k) + \sum_{k=0}^{N} D_k f'(x_k)$$

bu yerda $x_k = kh$, $h = 1/N$, C_k va D_k koeffitsientlar. Funksiya $f(x)$ Gilbert fazosiga tegishli deb olinadi. Xususan, $W_2^{(5,4)}$ Sobolev fazosida skalyar ko‘paytma

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f^{(5)}(x) g^{(5)}(x) dx$$

ko‘rinishda kiritiladi. Bu fazoga beshinchi tartibli hosilasi absolyut uzluksiz va to‘rtinchi tartibli hosilasi L_2 fazosiga tegishli bo‘lgan funksiyalar kiradi.
Kvadratur formulaning xatoligi

$$\ell(f) = \int_0^1 f(x)dx - \left(\sum_{k=0}^{N} C_k f(x_k) + \sum_{k=0}^{N} D_k f'(x_k) \right)$$

ifodasi bilan aniqlanadi. Bu ayirma $f(x)$ ga bog‘liq chiziqli funksionaldir. Optimal kvadratur formulani qurish uchun shunday C_k, D_k koeffitsientlarni topish kerakki, ular berilgan ortogonallik shartlarini qanoatlantirib, $\|\ell\|$ normani minimal qilsin.

MATERIALLAR VA USULLAR. Riss teoremasiga ko‘ra, Gilbert fazosida aniqlangan har qanday chiziqli funksional uchun shunday ekstremal funksiya mavjudki, uning yordamida funksional normasining kvadratini hisoblash mumkin. Bu teoremaga asosan xatolik funksionali normasining kvadrati

$$\|\ell\|^2 = \ell(\psi_\ell)$$

ko‘rinishida ifodalanadi, bu yerda ψ_ℓ ekstremal funksiya. Ekstremal funksiyaning ko‘rinishi fazoning xususiyatlariga va kvadratur formulaning tuzilishiga bog‘liq. Uni topishda Dirak delta-funksiyasi va kesmaning xarakteristik funksiyasidan foydalaniladi.

Ortogonallik shartlari kvadratur formulaning to‘rtinchi tartibli ko‘phadlar uchun aniq bo‘lishini ta’minlaydi. Bu shartlar koeffitsientlar orasidagi chiziqli bog‘lanishlarni beradi. Shulardan biri faqat noma’lum koeffitsientlarga tegishli bo‘lib, qolganlari ma’lum koeffitsientlarni aniqlaydi.

Xatolik funksionali normasining kvadrati koeffitsientlarning kvadratik funksiyasidir. Bu ifodani ortogonallik sharti ostida minimallashtirish Lagranj ko‘paytuvchilar usuli yordamida amalga oshiriladi. Lagranj funksiyasi tuzilib, uning xususiy hosilalari nolga tenglanadi. Natijada noma’lum koeffitsientlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

NATIJALAR. Bu sistemani yechish uchun diskret argumentli funksiyalar apparatidan foydalaniladi. Yechim natijasida optimal koeffitsientlarning analitik ifodalari olinadi. Bu koeffitsientlar qadam h ga va tugun nuqtalarining joylashuviga bog‘liq bo‘lib, ularning qiymatlari xatolik normasining kvadrati eng kichik bo‘ladigan tarzda tanlangan.

Optimal koeffitsientlar topilgandan so‘ng, xatolik funksionali normasining kvadrati hisoblanadi. Hisoblash natijasi shuni ko‘rsatadiki, bu norma kvadrati $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^{8}$ ga teng. Bu miqdor kvadratur formulaning xatoligining asimptotik bahosini ifodalaydi.

MUNOZARA. Eyler–Makloren kvadratur formulasi uzoq vaqtdan beri sonli integrallashda qo‘llanib kelinadi. Bu formula ham ma’lum shartlarda optimal xususiyatlarga ega. Xususan, $W_2^{(5,4)}$ fazosida optimal hisoblanadi va uning xatolik normasining kvadrati ham ma’lum bir qiymatga teng. Biroq qurilgan yangi formula $W_2^{(5,4)}$ fazosida optimal bo‘lib, uning xatoligi Eyler–Makloren formulasining xatoligidan kichikdir.

Bu farqni amaliy misolda ko‘rish mumkin. Masalan, $f(x)=e^x$ funksiyasining aniq integrali $e-1$ ga teng. Turli N (tugunlar soni) qiymatlari uchun ikkala formula bilan hisoblash natijalari taqqoslanganda, optimal formulaning xatoligi Eyler–Makloren xatoligidan bir necha baravar kichik ekanligi aniqlangan. N ortgan sari bu farq saqlanib qoladi va optimal formula aniqroq natija beradi.

XULOSA. Ushbu maqolada Gilbert fazosi va differensiallanuvchi funksiyalar fazosida optimal kvadratur formulalarni qurish masalasi o‘rganildi. Xatolik funksionalining normasi Riss teoremasi yordamida hisoblanib, uning kvadrati uchun analitik ifoda topildi. Lagranj ko‘paytuvchilar usuli yordamida optimal koeffitsientlar aniqlandi va ularning analitik ko‘rinishi keltirildi. Xatolik normasining kvadrati hisoblanib, uning $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^{8}$ ga tengligi ko‘rsatildi. Sonli tajribalar qurilgan optimal kvadratur formulaning klassik Eyler–Makloren formulasiga nisbatan aniqroq ekanligini tasdiqladi. Olingan natijalar integral tenglamalarni sonli yechish, xosmas integrallarni hisoblash va amaliy fizika masalalarida qo‘llanilishi mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. P.L. Butzer, R.L. Stem, «The Euler-MacLaurin Summation Formula, the Sampling Theorem, and Approximate Integration over the Real Axis», 1983.

2. L.F. Meyers, A. Sard, «Best Approximate Integration Formulas», Amer. J. Math. 71 (1950) 80-91.

3. A.R. Hayotov, G.V. Milovanovich, Kh.M. Shadimetov, «On an optimal quadrature formula in the sense of Sard», Numerical Algorithms, 57(4) (2011) 487-510.

4. S.L. Sobolev, «Introduction to the Theory of Cubature Formulas», Nauka, Moscow, 1974.

5. Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, «Optimal quadrature formulas in the sense of Sard in W_2^{(m,0)} space», Calcolo 51 (2014) 211-243.

6. Karimov, S. (2026). MOLIYAVIY BOZORLARNI STOXASTIK JARAYONLAR VA OPTIMALLASHTIRISH USULLARI ASOSIDA MODELLASHTIRISH. *SCIENTIFIC RESEARCH, INNOVATIONS, AND MODERN APPROACHES*, *1*(2), 98-101.

7. Karimov, S. (2026). THE ROLE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN DISEASE PREDICTION BASED ON MEDICAL DATA. *Экономика и социум*, (4-1 (143)), 268-271.