УДК: 004.93'1, 519.23, 330.4

Соловьёв А.С.,

Россия, г. Ростов-на-Дону,

ОЦЕНКИ, АНАЛИЗ, КЛАСТЕРИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Аннотация: *В работе предлагается методы распознавания образов сложных систем путём сведения их к задаче оптимизации* (*задачи Марковица*), либо *к задаче на собственные числа и собственные функции. Показана эквивалентность восприятия этих методов к распознаванию образов, когда системы понимаются как качественно определённые количества. Распознавание и кластеризация опираются на основное метрическое тождество* (*тождество Пифагора*).

Ключевые слова: *количество, качество, основное метрическое тождество, разбиение, кластеры, задача Марковица, собственные функции и собственные значения, оценка, риск, шанс, студент, преподаватель.*

Solovyov A.S., Russia, Rostov-on-don

EVALUATION, ANALYSIS, CLUSTERING, AND MANAGEMENT IN HIERARCHICAL STRUCTURES

Abstract: *The paper proposes methods for recognizing images of complex systems by reducing them to the optimization problem (Markowitz problem), or to the problem of eigenvalues and functions. The equivalence of the perception of these methods to pattern recognition is shown when systems are understood as qualitatively defined quantities. Recognition and clustering rely on the basic metric identity (the Pythagorean identity).*

Keywords: *quantity, quality, basic metric identity, partitioning, clusters, Markowitz problem, eigenfunctions and eigenvalues, estimation, risk, chance, student, teacher.*

Управление любым объектом (субъектом) x опирается на оценки его действия и охватывает прошлое, настоящее и будущее состояние. Но, прошлое аккумулируется в настоящем, а будущее предполагает возможность выбора вариантов эволюции из множества возможных допустимых состояний X, опять же, исходя из текущего момента времени.

Отсюда заключаем, что всё опирается в выбор измерительного эталона $s \in X$ как меры μ текущего состояния.

Хорошо известно, что объект любой природы суть количество a определённого качества Ψ и может быть представлен мультипликативной формой

$$x = a\Psi = \Psi a. \tag{1}$$

Если количество a является внешним интегральным собственным значением, то качество Ψ – его внутренняя дифференциальная характеристика, является его собственной функцией, опирается на уровни абстракции в иерархии описания этого свойства, и в оценке объекта обе эти взаимно двойственные характеристики связываются мерой μ. Следовательно, функционально состояние объекта определяется отношением $x = x(a, \Psi, \mu)$.

Отсюда заключаем, что наблюдение любого объекта посредством измерительного эталона и присутствии самого наблюдателя связано с оценкой описания поведения наблюдаемой и принятием управленческих решений, тем более в условиях выбора, хотя наблюдатель может в объекте наблюдения обнаруживать неограниченное множество свойств при абстрагировании путём их спектрального расширения.

Расслоение при абстрактном описании объекта можно представить следующей спектр – диаграммой (спектром)

$$0 \to a \xrightarrow{\alpha} (x_0 = L_0) \xrightarrow{H_1^0} L_1 \xrightarrow{H_2^1} L_2 \xrightarrow{H_3^2} \dots \xrightarrow{H_m^{m-1}} L_m \to 0, \tag{2}$$

С k-го уровня описание состояние принимает вид

$$x = x\left(L_k, H_0^k\right), \ . \tag{3}$$

Таким образом состояние объекта определяется как функционал x на малой категории

$$\mathcal{K} = (L, H), \tag{4}$$

где L множество объектов на слое соответствующего уровня абстрактного представления описания, а H – множество связей в их агрегации

$$x = x(\mathcal{K}) = \big(x(L), x(H)\big) = (X, \Psi). \qquad (5)$$

Здесь X_0, X_1, …, $X_m \in X$ системы объектов, характеризующие при расслоении агрегатный объект на различных уровнях иерархии его описания и выступающие в представлении (1) в качестве операторов, которые образуют коммутативную группу, а $\Psi_0^1, \Psi_1^2, \dots, \Psi_{m-1}^m \in \Psi$ – множество собственных функций, для которых имеет место внешний закон композиции $f: X \times \Psi \to \Psi$ ($f(X \circ \Psi) \to X\Psi$), удовлетворяющий свойствам:

1. $X_{k+1} = X_k \Psi_{k+1}^k$, для любых $\Psi_{k+1}^k \in \Psi$ и $X_k, X_{k+1} \in X$.
2. Для любых $x_k, y_k \in X_k$ $(x_k + y_k)\Psi_{k+1}^k = x_k\Psi_{k+1}^k + y_k\Psi_{k+1}^k$.
3. $\big(X_{k-1}\Psi_k^{k-1}\big)\Psi_{k+1}^k = X_{k-1}\big(\Psi_k^{k-1}\Psi_{k+1}^k\big)$.

Из свойства 3 для вертикальных связей следует рекуррентное равенство

$$\Psi_{n+1}^n \Psi_m^{n+1} = \Psi_m^n, \quad n < m, \qquad (6)$$

из которого находим, что между различными иерархическими описаниями одного и того же объекта существует прямая связь

$$X_m = X_n \Psi_m^n. \qquad (7)$$

Находим, что X коммутативное кольцо с единицей. Если определить множество X на поле действительных чисел R, то множество собственных функций Ψ, в представленном спектре, будет правым унитарным R-модулем, а множество X будет подмножеством векторного евклидова пространства над полем R, стандартная топология которого индуцируется скалярным квадратом

$$D(x) = x^2, \quad \mu(x, y) = x^* y, \quad D(x) = \mu(x, y). \qquad (8)$$

Элементы x_L каждого абстрактного слоя L являются свойствами объекта x в целом и описывают этот объект в пространстве $R^{|L|}$. Если же наблюдать два слоя объекта L_s и L_t ($s < t$), то объект наблюдения представляется как система, где каждый объект $y_k \in L_s$ на s-уровне абстрагирования рассматривается зависимым от состояний слоя L_t, т.е. $y_k = f_k(x_l \in: l = 1, 2, \dots, |L_t| = n)$, $k = 1, 2, \dots, |L_s| = m$. Таким образом, если объект

t-слоя $x \in R^n$, то объект s-слоя $y \in R^m$. При этом объекты t-слоя становятся аргументами объектов s-слоя.

При введении меры (8) элементы s-слоя будут рассматриваться как векторы. В такой интерпретации объект представляется двумерным массивом $M(m, n)$, который удобно отображать в табл. 1

Таблица 1. Запись межуровневой связи.

x / y		Факторы						Значения объектов
		x_1	x_2	. . .	x_l	. . .	x_n	
Объекты	y_1	$a^1{}_1$	$a^2{}_1$	. . .	$a^l{}_1$	. . .	$a^n{}_1$	b_1
	y_2	$a^1{}_2$	$a^2{}_2$	. . .	$a^l{}_2$	. . .	$a^n{}_2$	b_2
	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	y_k	$a^1{}_k$	$a^2{}_k$	. . .	$a^l{}_k$	. . .	$a^n{}_k$	b_k
	. .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	y_m	$a^1{}_m$	$a^2{}_m$	. . .	$a^l{}_m$	. . .	$a^n{}_m$	b_m
Значения факторов		a_1	a_2	. . .	a_l	. . .	a_n	$\boldsymbol{a}$ / $\boldsymbol{b}$

и записывать в операторной форме $y = Ax,$ т.е. при возникновении на слое L_a возбуждения $\boldsymbol{a}$ в силу равенства (7) находим, что на стоящим на более высоком уровне иерархии абстракции слое L_b индуцируется образ $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{a}$ этого возбуждения.

Из предыдущего следует, что любой объект можно распознать по его количественному и качественному признаку. Здесь следует отметить весьма важный факт – по желательному признаку наблюдателя путём выбора измерительного эталона. А поскольку качество характеристика дифференциальная, такое распознавание путём его дифференцирования можно проводить достаточно углублённо с горизонтальным расслоением на различные фактор-множества. Измерительный эталон так же должен обладать аналогичными конструктивными особенностями. Более того, здесь следует учитывать бинарное отношение объекта измерения и измерительного эталона. При их взаимодействии свойства эталона переносятся на свойства объекта и при бинарном сравнении любых допустимых состояний одного и того же объекта, или сопоставимых соизмеримых состояний различных объектов, следует учитывать неявное присутствие при таком сравнении эталона (наблюдателя), т.е. при бинарном отношение (x, y) имеем не отношение двух величин, а тернарное отношение (x, s, y), т.е. влияния эталона на процесс измерения, что равносильно влиянию наблюдателя или измерительного прибора на процесс измерения.

Короче говоря, эталон s индуцирует преобразованием G локальную систему координат в области соизмерения величин X_s, которая в свою очередь, возможно, получена напрямую преобразованием T стандартного базиса. Таким образом, выбор эталона связан с переходом к новому базису, к новой системе координат, с выбором преобразования координат – преобразованием факторов описания состояния системы.

Двойственность оценки в представлении (1) заключается в том, что количественная характеристика состояния объекта a величина скалярная, а его качество – его собственная функция, величина тензорная. Поэтому оценка (8) объекта в представлении (1) принимает вид

$$D(x) = D(a)D(\Psi), \quad D(a) = a^2, \quad D(\Psi) = 1. \tag{9}$$

При этом сама функция качества, как качественно определённое количество, по отношению к измерительному эталону, характеризуется равной единице скалярной величиной

$$\sigma(\Psi) = \sqrt{D(\Psi)} = 1. \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что функцию качества можно рассматривать как единицу объёмной количественной оценки исходного объекта наблюдения.

Будем рассматривать функцию качества Ψ как единицу оценки состояния (1). Предположим, что построен измерительный эталон s и преобразованием T определена система координат $T(O_s, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi n)$ с локальным базисом $S^n = (\Psi_k\colon k \in N = \{1, 2, \ldots, n\})$. Тогда функция качества будет функцией локальных координат $\Psi = \Psi(S) = \Psi(\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi n)$.

Полагая, что данная функция качества непрерывно дифференцируема по индивидуальным качественным признакам необходимое число раз, представим её в виде тензорного разложения

$$\Psi = \sum_{k\epsilon N} a^k \Psi_k + \sum_{k<l\epsilon N\times N} a^{kl} \Psi_k \wedge \Psi_l + \sum_{k<l<m\in N\times N\times N} a^{klm} \Psi_k \wedge \Psi_l \wedge \Psi_m + \cdots \quad (11)$$

Предположим, что $S^n \subset E^n$. Тогда ряд (11) представляет разложение собственной функции качества объекта на составляющие расширяющихся взаимно ортогональных подпространств E^n, $E^n \times E^n$, $E^n \times E^n \times E^n$, … . В таком представлении состояние становится элементом геометрической алгебры Клиффорда. А так как ряд,

$$a = \sum_{k\epsilon N} a^k + \sum_{k<l\epsilon N\times N} a^{kl} + \sum_{k<l<m\in N\times N\times N} a^{klm} + \cdots \quad (12)$$

составленный из коэффициентов расслоения качества по моментам нарастающих степеней (11), сходится достаточно быстро, то в практическом анализе распознавания образов и анализа динамики систем обычно ограничиваются принципом суперпозиции, линейной частью – симплексом

$$x = a^1\Psi_1 + \cdots + a^n\Psi_n, \quad (13)$$

принимая последовательность собственных функций S^n, инструменты наблюдателя, за базис наблюдения. В таком случае разложение (13) функции состояния системы по данным базисным функциям будет полностью описывать, в рамках соответствия принципу суперпозиции, состояние наблюдаемой в соответствующей системе координат, и достаточно рассматривать только коэффициенты этого разложения, т.е. с выбором базисной системы собственных функций выбираем оцифрованное описание любого состояния объекта наблюдения на априори заданном уровне абстракции его представления.

При сравнении объектов предварительно проводится метризация соответствующего пространства $X \subset E^n$ возможных состояний. Метрика строится на основе скалярного произведения (8). При этом на бинарном отношении объектов пространства X один из векторов-элементов принимается за полярный, тогда второй становиться аксиальным. В качестве же меры принимается положительно определённая симметричная билинейная форма

$$\mu(x, y) = x^* y = x \cdot y \tag{14}$$

как мера сходства объектов.

При полном качественном подобии объектов $y = kx$ имеем изоморфизм

$$\mu(x, y) = kD(x). \tag{15}$$

Из неравенства Коши-Буняковского при сопоставлении бинарных отношений следует основное метрическое тождество

$$D(x)D(y) = \mu^2(x, y) + \Gamma(x, y), \tag{16}$$

Здесь $\Gamma(x,y)$ – определитель Грама бинарного отношения (x, y), служит мерой качественного расхождения объектов и является мерой симплектического пространства, которая опирается на кососкалярное произведение $\nu(x,y) = x \wedge y$ ($\nu^2(x,y) \leq 0$). При полном сходстве (15) слагаемое $\Gamma(x, y)$ обращается в нуль.

С учётом неравенства $\Gamma(x,y) = |\nu(x,y)|^2 \geq 0$ и свойства

$$D(x)D(y) = D(x, y) = \sigma^2(x, y) \tag{17}$$

видим, что уравнение (16) является обычным тождеством Пифагора относительно данного бинарного отношения.

Отметим, что для сравнения m-арного отношения можно построить аналогичное метрическое тождество на основе обобщённого неравенства Адамара.

Тождество Пифагора (16) реализует единство качества, количества и меры и, следовательно, позволяет сделать на бинарном отношении состояний объектов агрегатную оценку одного состояния относительно другого.

Сравним пару (x, y) состояний $x = a\Psi$ и $y = b\Phi$ из области возможных состояний X некоторого объекта. Поскольку в тождество (17) входят однородные слагаемые второй степени по каждому аргументу, то на произведение a^2b^2 количественных агрегатных оценок состояний его можно сократить. Приходим к метрическому отношению качественных признаков

$$D(\Psi)D(\Phi) = \Psi^2\Phi^2 = \mu^2(\Psi, \Phi) + |\nu(\Psi, \Phi)|^2. \tag{18}$$

Но, $D(\Psi) = D(\Phi) = 1$. Поэтому при разложении на множители правой части равенства (18), получим

$$\Psi^2\Phi^2 = (\mu(\Psi, \Phi) - i|\nu(\Psi, \Phi)|)(\mu(\Psi, \Phi) + i|\nu(\Psi, \Phi)|). \tag{19}$$

С учётом соотношения при фиксации полярного элемента имеем

$$\nu(\Psi, \Phi) = \Psi \wedge \Phi = \Psi \times \Phi = \boldsymbol{n}, \quad D(\boldsymbol{n}) = 1. \tag{20}$$

Запишем первый множитель правой части равенства (18) в виде

$$\Psi^2 = \cos\theta + \boldsymbol{in}\sin\theta = e^{\boldsymbol{in}\theta}, \tag{21}$$

где величина

$$\theta = arctg\,\frac{|\nu(\Psi,\Phi)|}{\mu(\Psi,\Phi)} = \sqrt{\mu^{-2}(\Psi, \Phi) - 1} \tag{22}$$

характеризует агрегатную оценку качества в радиальном измерении.

Отсюда заключаем, что функция качества состояния x, которое определяется фиксированием одного из состояний (поляризацией), описывается унитарным кватернионом (или ротором)

$$\Psi = e^{-\boldsymbol{in}\theta/2}, \tag{23}$$

а качество аксиального состояния y определяется его сопряжением

$$\Phi = e^{\boldsymbol{in}\theta/2}. \tag{24}$$

Количественные характеристики объектов равномерно квантуются на линейно-упорядоченной шкале, в то время как качественным характеристикам в соответствие можно поставить концы их направляющих единичных векторов, которые в пространстве E^n отмечаются точками на единичной положительной полусфере. Их квантование становится проблематичным, условным и акцентируется на критериально-экстремизационных механизмах проблемы ранжирования, связанных с функциями выбора.

Если опираться на предложения, допустим, методом условного наследования, и полагать, что возможно построения без точек самопересечения замкнутой гладкой кривой L, проходящей через все отмеченные точки Ψ_k полусферы, рис. 1, с её гомотопически эквивалентным

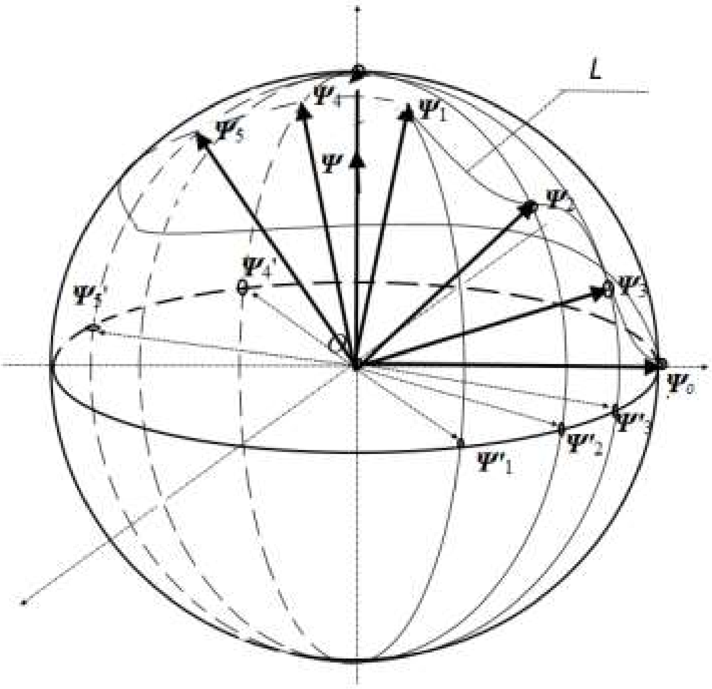

Рис. 1. Качественные признаки в сферическом представлении.

отображением на гомеоморфную прямую проективной плоскости, на которую отображается окружность большого круга, то на проективной прямой объекты будут циклически квантоваться по качественным признакам. При этом, с учётом качественного расслоения (11), распознавание объекта подобным методом можно проводить с наперёд заданной точностью. Как следствие, приходим к заключению, что качеству объектов, определённых упорядоченной последовательностью скалярных величин функцией (22) в радиальном измерении, можно поставить в соответствие циклически квантованные образы Ψ''_k точек Ψ'_k большого круга сферы на проективной прямой. Проблему же "катастроф" Уитни при возникновении особенностей при пространственных отображениях гладких кривых, как следует из рис. 1, можно решить небольшим смещением эталона.

Рассмотрим пример оценки подсистемы из системы региональных банков, которая сама является системой, табл. 2. Описание данной системы можно разбить на три уровня. На высшем нулевом уровне абстрагирования описание (1) представляется как: капитализация системы банков составляет 65659112 тыс. руб. На первом критериальном уровне описания в системе выделяются три качественных признака: капитал банка (составляет 4276408 тыс. руб.), его активы 41923457 и депозиты 19459247 тыс. руб.

Таблица 2. Состояние подсистемы региональных банков (тыс. руб.).

	Списочный номер	Факторы				
		Капитал банка	Активы		Депозиты	
			Кредиты	Др. активы	Вклады	Др. депозиты
1	2	3	4	5	6	7
Объекты	1	548077	3997427	2219084	1764093	1296646
	2	279206	2798760	1385540	1250144	1010233
	3	357011	4609518	2613635	2491708	2395655
	4	623634	1776040	753362	307207	173898
	5	294585	1163534	548229	273928	86928
	6	595411	5197822	2740197	2741752	1322985
	7	1048653	4186419	2271008	1400188	1068203
	8	281097	1110861	733809	379919	71254
	9	248734	2896306	921906	747203	677303

На втором уровне из активов выделяются кредиты (27736687 тыс. руб.), а из депозитов вклады населения (11356142 тыс. руб.). На первом уровне задачу можно рассматривать в пространстве E^3. Второй уровень дезагрегации даёт возможность проводить анализ системы в пространстве

E^5 и учитывать при анализе большее число её особенностей, что делает анализ системы более информативным.

Из сравнения числовых значений факторов дезагрегации следует, что капитал банка на порядок меньше других значений показателей, особенно на первом уровне. Казалось бы, при анализе влиянием этого фактора можно пренебречь. Но ясно, что этот фактор имеет важное значение, особенно при сравнении состояний. Поэтому показатели следует привести к сопоставимому виду. Эту задачу решает выбор эталона совместно с преобразованием системы координат.

Эталон строится экспертным путём. В качестве эталона можно взять прошлое состояние объекта или прогноз, сформировать эталон в соответствие с тактическим и стратегическим планом. Можно взять любое допустимое состояние системы, любой её объект, либо её состояние как среднее значение её показателей. Анализ можно проводить в пространстве последовательностей, суммируемых с первой степенью, сохраняя содержательный смысл результатов анализа (пространство L^1). В таком случае качество будет определяться пропорциями показателей, что не даёт возможность сделать агрегатную оценку качества. Однако, более наглядным и информационным является анализ в пространстве последовательностей, суммируемых с квадратом, в пространстве L^2. Оценки здесь равносильны оценкам пространства L^1, т.к. преобразования проводятся с помощью выпуклых функций.

Оценка качества (22) в пространстве L^2 предполагает использовать основное метрическое тождество (16) с мерой, построенной на основе функционала (9) в евклидовом пространстве, что даёт возможность существенно использовать в оценках эволюции наблюдаемой метрические свойства основного тождества, поскольку первое слагаемое правой части тождества определяет евклидову структуру на области допустимых состояний X объекта, что позволяет проводить сравнение состояний на траектории эволюции.

Второе слагаемое определяет на X симплектическую структуру. Это, в свою очередь, даёт возможность проводить операции с упорядоченными парами состояний, - пространственные сравнения.

Возьмём за эталон состояние системы – её средние характеристики. К этим характеристикам эталона отнесём соответствующие средние значения факторов описания состояния объектов. Значения факторов объектов отнесём к соответствующим значениям построенного эталона и полученные значения строк примем как векторного представления объектов. Векторы-строки нормируем.

Таблица 3. Расслоение системы по качественным признакам.

Группа	Объекты: Ранг объект	Объекты: № в списке	Факторы в структурном качестве системы. Направляющие векторы в L^2: 1	2	3	4	5	Оценки качества по отношению близости к эталону	Оценки количества в единицах эталона	Количественная оценка (%%)
1	2	3	4					5	6	7
G1	1	1	0.415	0.440	0.458	0.457	0.464	0.040	2.588	77.8
	2	6	0.388	0.450	0.457	0.511	0.420	0.092	2.884	
	3	2	0.362	0.450	0.443	0.470	0.500	0.103	2.118	
	4	9	0.393	0.526	0.415	0.418	0.471	0.108	1.842	
	5	7	0.550	0.431	0.444	0.390	0.403	0.127	2.702	
	6	3	0.297	0.418	0.441	0.481	0.558	0.193	2.922	
	Средние		0.403	0.455	0.446	0.457	0.472	0.110	15.06	
	%%		18.1	20.4	20.0	20.4	21.1		5.931	66.6
G2	7	8	0.574	0.448	0.509	0.409	0.210	0.280	1.341	22.2
	8	5	0.611	0.477	0.458	0.362	0.241	0.280	1.288	
	9	4	0.684	0.453	0.413	0.295	0.262	0.340	1.674	
	Средние		0.625	0.461	0.461	0.356	0.239	0.300	4.303	
	%%		29.2	21.5	21.5	16.6	11.1		2.981	33.4
G	Средние		0.483	0.463	0.457	0.429	0.400	0.173	8.687	100
	%%		22.0	20.8	20.5	19.1	17.6			

В соответствие с представлением (1) норму примем за агрегатную объёмную количественную оценку состояния соответствующего объекта системы, а факторное распределение единицы – за описание его качества.

Здесь множество объектов G по качественному признаку с порогом разбиения $\Delta = 0.190$ расслаивается на две подгруппы $G1$ и G2. Результаты расчётов приведены в табл. 3.

В табл.3 объекты (табл. 2) представлены в ранговом порядке (столбец 2), квантованные по близости их качества с эталоном. Оценки качества в радианном измерении по формуле (22) приведены в столбце 5. По качественному признаку данная выборка составляет плотную группу. Поскольку за эталон здесь берётся оценка системы в целом, то первый по рангу объект можно взять за базисный признак системы. Его коэффициент корреляции с эталоном равен 0, 999. Коэффициент корреляции последнего по рангу объекта (это четвёртый объект исходного списка), равен 0.942.

В четвёртом столбце таблицы приведены фактор-компоненты собственных функций (11) качества объектов в пространстве L^2. Если эти компоненты возвести в квадрат, то отношение полученных чисел покажет качественное отклонение объекта от эталона в пространстве L^1. Так в процентном отношении для первого объекта находим

$$17.2 \ : \ 19.4 \ : \ 21.0 \ : \ 20.9 \ : \ 21.5.$$

Для 9-го по рангу объекта эти отношения составят

$$46.8 \ : \ 20.5 \ : \ 17.1 \ : \ 8.7 \ : \ 6.9.$$

Очевидно, здесь нельзя воспользоваться построением агрегатной качественной оценки, так как ни одна из средних не будет отражать коэффициент различия. Однако в этом и нет необходимости, поскольку данные пропорции со всей наглядностью свидетельствуют о направлении деятельности каждого объекта. Обращаясь к именным назначениям факторов, можно заключить, что если первый объект-банк полностью удовлетворяет социальному предназначению в социальной региональной финансовой структуре (тесно связанной с управлением ЦБ), то второй объект-банк следует корпоративным целям и при поддержке ЦБ должен пройти дополнительную экспертизу.

В шестом и седьмом столбцах приведены количественные оценки каждого объекта и группы в целом. Отсюда видим, что объекты первой группы по объёмным характеристикам намного превосходят объекты второй группы и в общей деятельности системы занимают 77.8%. Здесь под групповыми оценками приведены оценки соответствующих задач, рассчитанные путём решения их как задач на собственные числа и векторы. Рассчитанные в процентном отношении количественные оценки для групп приведены в столбце 7. Подстрочными величинами приведены количественные оценки решением задачи на собственные значения, их отношения составляют соответственно 66.6 % и 33.4%.

Из табл. 3 получаем на данном уровне абстрагирования системы полное представление о деятельности выделенной наблюдателем группы объектов как целого, так и каждого отдельного её составляющего элемента. А, следовательно легко построить схему управления системой с помощью методов "кнута и пряника".

Следует особо подчеркнуть, что средние величины качества объектов не могут быть усреднением качественных признаков и строятся исходя их представления собственной функции системы (и её подсистем $G1$ и $G2$) в виде разложения по её собственным функциям, которое следует из (1) и (13):

$$\Psi = \alpha^1\Psi_1 + \alpha^2\Psi_2 + \cdots + \alpha^m\Psi_m, \qquad m = |M|. \tag{25}$$

В свою очередь унитарные качества системы разлагаются по факторам структурного её представления (по факторному базису стандартного представления в евклидовом пространстве E^n, $n = 5$)

$$\Psi_k = a_k^1 e_1 + a_k^2 e_2 + \cdots + a_k^n e_n, \qquad n = |N|. \tag{26}$$

Отсюда находим

$$\Psi = \sum_{l\in N} a^l \Psi_l, \qquad a^l = \sum_{k\in M} a_k^l\, \alpha^k. \tag{27}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов разложения (25) из соотношений (9) имеем уравнение $D(\Psi) = 1$ и, вытекающую отсюда, систему неравенств $\mu(\Psi, \Psi_k) \le 1, \quad k \in M$. Если ввести обозначение $f_k =$

$\mu(\Psi, \Psi_k)$ и наибольшее из этих значений последовательности $\{f_k\}$ обозначить f_{max}, то приходим к задачи нелинейного программирования:

$$\max\{f_k = \mu(\Psi, \Psi_k): D(\Psi) = 1, \alpha^k \geq 0, k \in M\}, \quad (28)$$

При дополнительных обозначениях

$$F = \frac{1}{{f_{max}}^2}, \quad u_k = F\alpha^k, \quad (29)$$

для вспомогательных коэффициентов получаем задачу квадратического программирования

$$\min\{F = \boldsymbol{u}^T W \boldsymbol{u}: W\boldsymbol{u} \leq 1, \boldsymbol{u} \geq 0\}, \ \boldsymbol{u} = (u_1; u_2; \dots; u_m), \quad (30)$$

после решения которой, по формулам (27), находим собственную функцию качества системы и, аналогично, каждой её подсистемы $G1$ и $G2$, которые размещены в строках "средние". В таблице 3 это показатели качественных признаков системы в целом и каждой её подсистемы в отдельности представлены строкой ниже в процентном отношении.

В задаче (30) выражение $W = ((\mu(\Psi_k, \Psi_l))_{k\times l \in M\times M}$ определяет матрицу корреляции унитарных качественных признаков системы и одновременно служит метрическим тензором в пространстве возможных состояний системы, а выражение $H = W/2$ для задачи является гамильтоновым оператором и может быть использовано при решении динамических стационарных задач, приводящих к уравнению Шредингера .

Можно отметить, что к задаче (30) приводится и задача Марковица о формировании инвестиционного портфеля, и это не случайно. Постановку и метод анализа легко применить к задаче размещения денежных средств в рыночных активах с целью получения дохода с минимальным риском.

Имея матрицу корреляции качественных признаков W, путём перехода к разреженной матрице можно применить разбиение данной группы на аналогичные классы G1 и G2 декомпозицией Далмейджа-Мендельсона (DM-декомпозиция). На уровне корреляции $k = 0.985$ получаем диаграмму, изображённую на рис. 2.

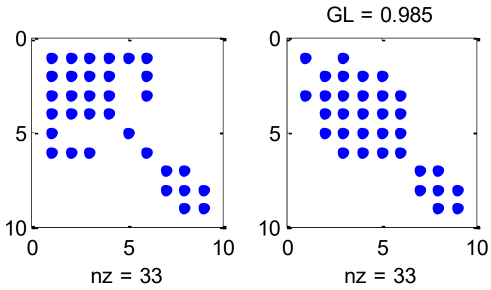

Рис. 2. DM-декомпозиция при k = 0.985.

Здесь девять точек – объектов имеют порядок

$$g = 7, 3, 1, 2, 6, 9, 4, 5, 8. \qquad (31)$$

Из рис.2 видим, что объекты разбиваются на две группы $Gr1_{DM}$ = (7, 3, 1, 2, 6, 9) и $Gr2_{DM}$ = (4, 5, 8). Эти группы до порядка их членов совпадают с расслоением по предложенному выше показателю их агрегатного качества, приведённому в табл. 3.

При значении коэффициента корреляции k = 0.990 приходим к следующей последовательности размещения объектов

$$g = 6, 1, 2, 3, 9, 7, 5, 8, 4 \qquad (32)$$

и диаграмме, изображённой на рис. 3.

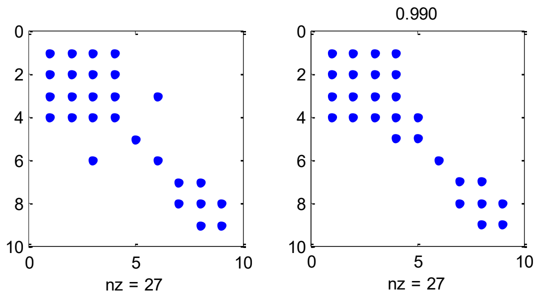

Рис. 3. *DM*- декомпозиция при k = 0.990.

Здесь отмечаем плотную группу $Gr1_{DM}$ = (6, 1, 2, 3) элементов системы, к которой примыкает 9-ый элемент системы, и, по прежнему, группу $Gr2_{DM}$ = (5, 8, 3). Седьмой элемент выступает изолированным и разделяющим эти группы.

Отметим, что в методе Далмейджа-Мендельсона, хотя эталон и не фиксируется, но классификация объектов связана с их корреляционной матрицей (и, следовательно, с их качеством), и квантованием на проективной прямой, т.е. с их порядком на замкнутой кривой L, рис. 1, что связано с цикличностью агрегатных оценок качества. А последовательный выбор значений коэффициентов корреляции равносилен вращению эталона.

При коэффициенте корреляции k = 0.999 и выше данного объекты системы квантуются по качественным признакам в порядке, соответствующим рангу, приведённому в табл. 3:

$$g = 1, 6, 2, 9, 7, 3, 8, 5, 4, \qquad (33)$$

что свидетельствует о том, что фиксировано положение эталона, т.е. сравнение объектов системы в методе Далмейджа-Мендельсона проводится по её средним качественным характеристикам, а последовательности (31) и (32) отвечают отклонениям выбранного эталона от её оценки относительно среднего состояния.

Выше рассматриваются оценки двумерных массивов $M(m, n)$. Однако, массивы могут быть многомерными $M(m, n, \ldots, k, l)$. В частности, таким многомерным массивом может выступать динамический массив $M(t, m, n)$.

Суть построения оценки элемента массива заключается не только в выборе меры, но и в построении метрического эталона. Именно эталон является мерой сжатия информации путём проектирования на него объектов. Элементами данного массива служат некоторые образы в пространстве $E^m \times E^n$. В предложенном выше анализе был построен гипотетический объект пространства E^m по средним характеристикам факторного пространства E^n. В данном случае построен явный метрический инструмент, который в дальнейшем анализе используется выбранной метрической функцией – способом измерения, мерой в евклидовом пространстве. Построение эталона может не акцентироваться, как, например, в методе Далмейджа-

Мендельсона, но оно неявно присутствует при построении матрицы корреляции объектов.

Предыдущий пример легко перенести на пример формирования инвестиционного портфеля, например, на формирование портфеля ценных бумаг. Рассматривая объекты пространства E^m как ценные бумаги, мы наделяем их в факторном пространстве E^n определёнными достоинствами (см. табл. 1), учёт которых сводит нашу задачу к задаче квадратического программирования путём построения корреляционной матрицы (будем называть эту задачу задачей Марковица)

$$W = \left(\left(\mu(\Psi_k, \Psi_l)\right)\right)_{m\times m}. \tag{34}$$

В этом случае задача Марковица заключается в формировании инвестиционного портфеля набором ценных бумаг.

Но, очевидно, здесь задача носит двойственный характер. Если поменять местами объекты и факторы, последние характеризуются своими распределениями на ценных бумагах, и объектами становятся элементы пространства E^n, а эталон строится в пространстве E^m на множестве объектов- факторов. Табл. 1 в этом случае транспонируется относительно главной диагонали. И в новой таблице присваиваются факторам-объектам функции качества Φ. Получаем матрицу корреляции факторов

$$U = \left(\left(\mu(\Phi^s, \Phi^t)\right)\right)_{n\times n} = \tag{35}$$

и задача Марковица приобретает характер ранжирования факторов.

Заключаем, что задача двухкритериальная. Можно задачу Марковица рассматривать относительно бумаг по их агрегатному качеству, а можно поставить задачу о классификации факторов на данном множестве бумаг. И та, и другая задача приводит к решению задачи квадратического программирования (30). Двойственность задачи ведёт и к двойственности методов её решения, если рассматривать её как задачу на собственные значения и собственные функции. Например, если рассматривать поиски коэффициентов разложения собственной функции (25) путём сведения решения задачи к решению задачи оптимизации (30), то получаем результат

$$\Psi = [0.4899 \quad 0.4633 \quad 0.4570 \quad 0.4260 \quad 0.3938].$$

Если же эту задачу рассматривать в постановке сведения её к задаче на собственные значения, то получаем результат

$$\Phi = [0.4827 \quad 0.4631 \quad 0.4567 \quad 0.4292 \quad 0.3997].$$

Результаты различаются, но можно предположить, что это различие заключено в алгоритмах решения задач. Действительно, для первой группы, где множество объектов системы сокращается на треть, значение собственной функции имеет, соответственно, представление

$$\Psi 1 = [0.4035 \quad 0.4553 \quad 0.4456 \quad 0.4568 \quad 0.4719],$$

$$\Phi 1 = [0.4028 \quad 0.4554 \quad 0.4456 \quad 0.4571 \quad 0.4721].$$

Для второй группы из трети объектов системы получаем

$$\Psi 2 = [0.6251 \quad 0.4609 \quad 0.4614 \quad 0.3564 \quad 0.2386],$$

$$\Phi 2 = [0.6251 \quad 0.4609 \quad 0.4614 \quad 0.3564 \quad 0.2386].$$

Отсюда заключаем, что с ростом размерности матрицы корреляции (34) возрастает погрешность решения задачи стандартными числовыми методами предложенных выше алгоритмов решения.

Таким образом здесь для анализа группового поведения выделяются два метода решения. Первый метод предлагает решение задачи путём приведения её к задаче оптимизации. Второй метод прямо использует описание объектов как качественно определённые количества, что сводит решение задачи к задаче на собственные значения и собственные функции. Чтобы выяснить преимущества постановки задачи во втором случае рассмотрим третий пример.

Хорошо известно, что каждый человек уникален. Он обладает множеством собственных свойств, функций. Множество собственных функций может быть бесконечно большим. При различных обстоятельствах эти свойства проявляются по-разному, принимают различные значения, квантуются. Каждому свойству в соответствие можно поставить определённую квантовую шкалу: вербальную, ранговую, бальную, разностную, шкалу отношений, на которой будет отмечаться значение соответствующего свойства. Естественно, что любую шкалу можно оцифровать.

Агрегация этих свойств формирует характер человека, его особенность как уникума, который в разных обстоятельствах проявляется по-разному. Объединяясь, формируются новые свойства этих объединений. Свойства таких объединений как коллектив, группа, толпа совершенно различны и это различие легко объяснимо теснотой связей соответствующих составляющих их элементов.

На практике наблюдатель выбирает некоторое ограниченное множество свойств (конечное множество признаков – собственных функций), строит своё измерительное пространство, на которое проектирует всю совокупность свойств наблюдаемой. В построенном субъективном пространстве наблюдатель формирует свой измерительный эталон, на который проектирует выбранные признаки наблюдаемой и даёт свою оценку состояния последней.

Например, каждый студент на множестве признаков $S^m = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m)$ обладает множеством собственных функций. Это выделяет его в группе как личность. Но эти свойства в разных обстоятельствах проявляются по-разному, формируя при определённых обстоятельствах определённое состояние студента $x = x^k \Psi_k$.[1]

Будем полагать, что коэффициенты этой линейной комбинации действительные неотрицательные числа. Набор S^m собственных функций принимаем за базис описания состояния $x \in X$ из множества возможных состояний студента. Как видим, состояние студента в выбранном базисе описывается набором действительных чисел.

[1] Для упрощения обозначений здесь используется правило немого индекса.

Предположим, что студент должен сдавать экзамен, а состояние x и есть его настрой на эту сдачу. Наблюдателем и экспертом подготовки студента к сдаче соответствующего предмета является преподаватель данного предмета. Он формирует определённый набор свойств S^m (именно он выделяет данный ограниченный набор собственных функций), которым должен обладать студент для сдачи предмета, и формирует измерительный эталон $y = y^l \Psi_l$, $\Psi_l \in S^m$, который при оценке знаний студентов характеризуется как проективная ось.

Теперь, для оценки знаний студента нужно построить меру. Обычно мера порождается скалярным квадратом $D(y) = y^2$, который индуцирован билинейной положительно определённой симметричной формой $\mu(x, y) = x \cdot y$, определяемой на X внутренним произведением $x \cdot y$ на бинарном отношении (x, y). Отношение же знаний студента с требованиями преподавателя характеризуются тензорным произведением, которое определяется как сумма внутреннего и внешнего $x \wedge y$ произведений

$$xy = x \cdot y + x \wedge y, \tag{36}$$

из которого относительно данного бинарного соответствия получаем основное метрическое тождество

$$D(xy) = D(x \cdot y) + D(x \wedge y). \tag{37}$$

и находим в индикаторном виде возможную оценку:

- знаний студента преподавателем

$$I = \sqrt{\frac{D(x \cdot y)}{D(xy)}}; \tag{38}$$

- риска не сдачи экзамена

$$J = \sqrt{\frac{D(x \wedge y)}{D(xy)}}; \tag{39}$$

- и шанса сдачи

$$ch = \frac{D(x \cdot y)}{D(x \wedge y)}. \tag{40}$$

Предположим, что экзаменатор сформировал на множестве X студентов по их готовности к сдаче экзамена эталон как качественно определённое количество $y = \Psi b$ и $x \in X$, эталон Ψ. Как меру готовности к сдаче экзамена в связи с априори известными требованиями Ψ преподавателя студент оценил своё состояние функцией $x = \Psi a$. Находим условное математическое ожидание студентом оценки преподавателем его знаний

$$E(x, y) = \sqrt{D(x \cdot y)} = a^* G b, \quad (41)$$

где звёздочкой обозначено эрмитово сопряжение (для нашего случая – транспонирование), а $G = \Psi^* \Psi$ – метрический тензор, сформированный на основе готовности студентов, прослушавших данный курс на множестве X, т.е. сформированный преподавателем последействием на основе усвоения материала студентами, множеством X, в процессе обучения. Выражение (41) и будет определённой в матричной форме мерой состояния ожидания студента и его оценок вида (38) – (40) в их отображении на соответствующие измерительные шкалы.

Использованные источники.

1. http://socialphysics.narod.ru/