УДК 517.9

Пошаходжаева Г. Дж.

Чирчикский государственный педагогический институт

ОТОБРАЖЕНИЯ ПЕРВОГО ВОЗВРАЩЕНИЯ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

***Аннотация**: Рассмотрены свойства орбиты гомеоморфизмов окружности*

***Ключевые слова:** орбита, окружность, критическое отображение, теорема де Мело, множество, методика.*

Poshahodzhaeva G.J.

Chirchik State Pedagogical Institute

FIRST RETURN DISPLAYS FOR CRITICAL CIRCLE DISPLAYS

***Abstract**: We consider the properties of the orbit of circle homeomorphisms*

***Key words:** orbit, circle, critical mapping, de Melo's theorem, set, technique.*

В настоящей работе мы изучаем свойства орбиты гомеоморфизмов окружности из класса $C^3(S^1)$ с единственной кубической критической точкой $x_0 = x_{cr}$ и иррациональным числом вращения

$$\rho_k = [k, k, ..., k, ...],\ k \geq 1.$$

В силу теоремы де Мело и П. Гуарино см.[1] любые два такие гомеоморфизма T_1 и T_2 сопряжены некоторым диффеоморфизмом из класса $C^{1+\beta}(S^1)$, где константа $\beta > 0$ - универсальная константа, т.е. не зависит от выбора T_1 и T_2.

Ренормализации критических гомеоморфизмов окружности изучались в работах [2], [3], [4], [5], [6].

Исходя из исследований Остлунда и др. [9] относительно ренормализации критических гомеоморфизмов, определим в пространстве пары $(\hat{\xi},\hat{\eta})$ критических гомеоморфизмов прямой R^1. Пусть $k \geq 1$. Определим множество X_k^{cr}, состоящее из пар $(\hat{\xi},\hat{\eta})$ аналитических, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой R^1, удовлетворяющих следующим условиям:

(a) $0 < \hat{\xi}(0) < 1;$

(b) $\hat{\xi}(0) = \hat{\eta}(0) + 1;$

(c) $\hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) = \hat{\eta}(\hat{\xi}(0))$

(d) $\hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) < 0,\ \hat{\xi}^{(2)}(\hat{\eta}(0)) < 0, \dots, \hat{\xi}^{(k-1)}(\hat{\eta}(0)) < 0;$

(e) $\hat{\xi}^{(k)}(\hat{\eta}(0)) > 0;$

(f) $\hat{\xi}'(0) = \hat{\xi}''(0) = 0,\ \hat{\eta}'(0) = \hat{\eta}''(0) = 0,$ и $\xi'''(0) \neq 0, \eta'''(0) \neq 0;$

(g) $(\hat{\xi} \circ \hat{\eta})'''(0) = (\hat{\eta} \circ \hat{\xi})'''(0)$.

Из условий (a), (b) и (c) вытекает, что $\hat{\eta}(0) < \hat{\xi}(\hat{\eta}(0)) < 0$. В случае $k = 1$ условие (d) опускается.

Пусть $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in X_k^{cr}$. Заметим, что условия (a), (b) и (c) позволяют построить гомеоморфизм окружности $[\hat{\eta}(0),\hat{\xi}(0))$:

$$T_{\hat{\xi},\hat{\eta}}x = \begin{cases} \hat{\xi}(x), & \text{если} \quad x \in [\hat{\eta}(0),0), \\ \hat{\eta}(x), & \text{если} \quad x \in [0,\hat{\xi}(0)) \end{cases}$$

Теперь определим ренормгрупповое преобразование $R_k : X_k^{cr} \to X_k^{cr}$ по формуле:

$$R_k(\hat{\xi},\hat{\eta}) = (\alpha\ \hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(\alpha^{-1}x)),\ \alpha\ \hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(\hat{\xi}(\alpha^{-1}x))))\,,$$

где, $\alpha = \alpha(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \left(\hat{\xi}^{k-1}(\hat{\eta}(0)) - \hat{\xi}^{k}(\hat{\eta}(0))\right)^{-1} < -1.$

Обозначим через $\tilde{X}_k^{cr}$ подмножество X_k^{cr}, состоящее из таких пар $(\hat{\xi},\hat{\eta})$, что число вращения

$$\rho(\hat{\xi},\hat{\eta}) = \rho_k = [k,k,...,k,...] = \frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2}\,.$$

Ренормгрупповое преобразование R_k в подмножестве $\tilde{X}_k^{cr}$ имеет единственную гиперболическую неподвижную точку (ξ_k,η_k) (см. [56], [59]). В дальнейшем для простоты записи в индексе пары (ξ_k,η_k) будем опускать k. Отметим, что $\xi(x)$ и $\eta(x)$ являются аналитическими функциями от x^3, т.е.

$$\eta(x) = \eta(0) + \frac{\eta^{(3)}(0)}{1!}\cdot x^3 + \frac{\eta^{(6)}(0)}{2!}\cdot x^6 + ... + \frac{\eta^{(3n)}(0)}{n!}\cdot x^{3n} + ... \qquad (1)$$

$$\xi(x) = \xi(0) + \frac{\xi^{(3)}(0)}{1!}\cdot x^3 + \frac{\xi^{(6)}(0)}{2!}\cdot x^6 + ... + \frac{\xi^{(3n)}(0)}{n!}\cdot x^{3n} + ... \qquad (2)$$

Отметим, что при помощи пары (ξ,η) можно определить критическое отображение окружности S^1 следующим образом:

$$Tx = \begin{cases} l(\xi\ (l^{-1}(x))), & \text{если} \quad 0 \le x < -\eta(0), \\ l(\eta(l^{-1}(x))), & \text{если} \quad -\eta(0) \le x < 1. \end{cases}$$

где $l:[\eta(0),\xi(0)) \to [0,1)$ - линейная функция, определяемая по формуле $l(x) = x - \eta(0)$, $\forall x \in [\eta(0),\xi(0))$. Ясно, что $x_0 = -\eta(0)$ является кубической критической точкой отображения T. Используя явный вид R_k (см. (2)), получим, что пара функций (ξ,η) удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \xi(x) = \alpha\xi^{k-1} \circ \eta(\alpha^{-1}x), \\ \eta(x) = \alpha\xi^{k-1} \circ \eta \circ \xi(\alpha^{-1}x), \end{cases} \qquad (3)$$

где $\alpha = [\xi^{k-1}(\eta(0)) - \xi^{k}(\eta(0))]^{-1}$.

По определению

$$Tx = T_{\xi,\eta}x = \begin{cases} \xi(x), & \text{если} \quad x \in [\eta(0), 0), \\ \eta(x), & \text{если} \quad x \in [0, \xi(0)). \end{cases}$$

Времена первого возвращения, т.е. числа $q_n = q_n(\rho_k)$, $n \geq 1$, удовлетворяют разностному уравнению

$$q_{n+1} = kq_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 1, \; q_1 = k \tag{4}$$

Отображения T^{q_n}, $n \geq 1$ называются отображениями первого возвращения. Сформулируем основную теорему о поведении отображений T^{q_n} и $T^{q_n + q_{n+1}}$.

Теорема 1. Для каждого $n \geq 1$ имеют место следующие соотношения:

$$T^{q_n}(\alpha^{-n}x) = \alpha^{-n}\xi(x), \quad x \in [\eta(0), 0), \tag{5}$$

$$T^{q_n + q_{n-1}}(\alpha^{-n}x) = \alpha^{-n}\eta(x), \quad x \in [0, \xi(0)). \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1. докажем по индукции. Пусть $n = 1$, тогда $q_1 = k$ и $\alpha^{-1}x \in [0, \xi(0))$. Отсюда следует, что

$$T^{q_1}(\alpha^{-1}x) = T^{k}(\alpha^{-1}x) = T^{k-1}(T(\alpha^{-1}x)) = T^{k-1}(\eta(\alpha^{-1}x)).$$

Поскольку $\eta(\alpha^{-1}x) \in \left[\eta(0), \eta(\xi(0))\right)$, то получим, что

$$T^{k-1}(\eta(\alpha^{-1}x)) = \xi^{k-1}(\eta(\alpha^{-1}x)) = \alpha^{-1}\xi(x).$$

Предположим, что равенство (5) справедливо для $k \leq n$, и докажем его для $k = n+1$. Учитывая равенство $q_{n+1} = kq_n + q_{n-1}$, получаем:

$$T^{q_{n+1}}(\alpha^{-(n+1)}x) = T^{kq_{n+1} + q_{n-1}}(\alpha^{-(n+1)}x) = T^{kq_n}(T^{q_{n-1}}(\alpha^{-(n-1)}\alpha^{-2}x)) =$$
$$= (T^{kq_n}(\alpha^{-(n-1)}\xi(\alpha^{-2}x)) = T^{(k-1)q_n}(T^{q_n}(\alpha^{-n}\alpha\xi(\alpha^{-2}x))) =$$

$$= T^{(k-1)q_n}(\alpha^{-n}\xi(\alpha\xi(\alpha^{-2}x))) = T^{(k-1)q_n}(\alpha^{-n}\eta(\alpha^{-1}x)) =$$

$$= T^{(k-2)q_n}(T^{q_n}(\alpha^{-n}\eta(\alpha^{-1}x))) = T^{(k-2)q_n}(\alpha^{-n}\xi(\eta(\alpha^{-1}x))) = \ldots$$

$$=T^{q_n}(\alpha^{-n}\xi^{k-2}\eta(\alpha^{-1}x))=\alpha^{-n}\alpha^{-1}\xi(x)=\alpha^{-(n+1)}\xi(x).$$

Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Проверим соотношение (6) для $n=1$:

$$T^{q_1+q_0}(\alpha^{-1}x)=T^{k+1}(\alpha^{-1}x)=T^{k}(T(\alpha^{-1}x))=T^{k}(\xi(\alpha^{-1}x))=$$

$$=(T^{k-1}(T(\xi(\alpha^{-1}x)))=T^{k-1}(\eta(\xi(\alpha^{-1}x)))=$$

$$=T^{k-2}(\xi(\eta(\xi(\alpha^{-1}x))))=...=\xi^{k-1}\circ\eta\circ\xi(\alpha^{-1}x)=\alpha^{-1}\eta(x).$$

Пусть (6) справедливо для $k\le n$, и докажем ее для $k=n+1$. Имеем

$$T^{q_{n+1}+q_n}(\alpha^{-(n+1)}x)=T^{q_{n+1}}(T^{q_n}(\alpha^{-n}\alpha^{-1}x))=(T^{q_{n+1}}(\alpha^{-n}\xi(\alpha^{-1}x))=$$

$$=T^{q_{n+1}}(\alpha^{-(n+1)}\alpha^{-1}\xi(\alpha^{-1}x))=\alpha^{-(n+1)}(\xi(\alpha\xi(\alpha^{-1}x)=\alpha^{-(n+1)}\eta(x).$$

Здесь мы использовали тот факт, что $\alpha^{-1}x$, $\alpha\,\xi(\alpha^{-1}x)\in[\eta(0),0)$, и соотношения (3). Теорема 1. полностью доказана.

Следствие 1. Пусть $x_0=0$ и $x_i=T^i x_0,\ i\ge 1$. Для всех $n\ge 1$ справедливы равенства

$$x_{q_n}=\alpha^{-n}\xi(0),\qquad x_{q_{n-1}+q_n}=\alpha^{-n}\eta(0).$$

Доказательство следствия непосредственно вытекает из (6) при $x=0$. Суть следствия состоит в том, что x_{q_n} и $x_{q_n+q_{n+1}}$ получаются от $\xi(0)$ и $\eta(0)$ умножением на α^{-n}.

Обозначим через A_n отрезок орбиты критической точки $x_0=0$, состоящий из разбиения $\bar{P}_n(x_0)$, т. е. $A_n=\{x_0=0,\ x_1,...,x_{q_n+q_{n+1}-1}\}$.

Далее разобьем множество A_n на $k+1$ подмножеств $A_n^{(1)},A_n^{(2)},...,A_n^{(k+1)}$ следующим образом:

$$A_n^{(1)}=A_n\cap[0,\xi(0)],$$

$$A_n^{(l+1)}=A_n\cap[x_l,x_{l+1}],\quad 1\le l\le k-1,$$

$$A_n^{(k+1)}=A_n\cap[x_k,0],$$

$$A_n^{(1,1)}=A_n\cap[0,x_{q_0+q_1}],$$

$$A_n^{(1,2)} = A_n \cap [x_{q_0+q_1}, \xi(0)].$$

Ясно, что

$$A_n = \bigcup_{l=1}^{k+1} A_n^{(l)}\ , \qquad A_n^{(1)} = A_n^{(1,1)} \cup A_n^{(1,2)}.$$

Из определения $A_n^{(i)},\ i = \overline{1,(k+1)}$ и структуры динамических разбиений следует, что

$$\#(A_n^{(i)}) = q_n + q_{n-1}, i = \overline{1,k}$$

$$\#(A_n^{(k+1)}) = q_{n-1} + q_{n-2},$$

здесь $\#(A)$ обозначает число элементов множества A.

Следующая теорема описывает переход от A_n к A_{n+1}.

Теорема 2. Для каждого $n \geq 1$ имеют место следующие соотношения:

$$A_{n+1}^{(k+1)} = \alpha^{-1}(A_n^{(1)} \cup \{\xi(0)\}),$$
$$A_{n+1}^{(l+1)} = \xi^{l-1}(\eta\ (A_{n+1}^{(1)})), \quad 1 \leq l \leq k-1,$$

$$A_n^{(1,1)} = \alpha^{-1}(A_n^{(2)} \bigcup A_n^{(3)} \bigcup \ldots \bigcup A_n^{(k+1)}),$$
$$A_{n+1}^{(1,2)} = \xi\ (A_{n+1}^{(k+1)}) = \xi\ (\alpha^{-1} A_n^{(1)}).$$

Доказательство теоремы 2. Эту теорему тоже докажем по индукции. Используя определение $A_n^{(i)}, i = \overline{1, k+1}$ и структуру динамических разбиений, утверждение теоремы легко проверяется для $n = 1$. Множества A_n и A_{n+1} запишем в виде:

$$A_n = A_{n-1} \cup (A_n\ ,\ \ A_{n-1}),$$

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1}\ ,\ \ A_n).$$

Для множеств A_{n-1} и A_n, по индуктивному предположению, справедливо утверждение теоремы 2. но, с другой стороны, A_{n-1} является частью A_n, а A_n есть часть A_{n+1}. Следовательно, нам достаточно доказать утверждение теоремы 2. для множеств A_n , A_{n-1} и A_{n+1} , A_n. Используя определение множеств A_i, получаем:

$$A_{n+1}\ ,\quad A_n=\{x_{q_n+q_{n-1}},x_{q_n+q_{n-1}+1},\ldots,x_{q_{n+1}+q_n-1}\},$$

$$A_n\ ,\quad A_{n-1}=\{x_{q_{n-1}+q_{n-2}},x_{q_{n-1}+q_{n-2}+1},\ldots,x_{q_{n-1}+q_n-1}\},$$

$$\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)^{(j)})=kq_{n-1},\ 1\le j\le k,$$

$$\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)^{(k+1)})=kq_{n-2}.$$

Возьмем первый элемент $x_{q_n+q_{n-1}}$ множества A_{n+1} , A_n. В силу следствия 1.

$$x_{q_n+q_{n-1}}=\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}}. \tag{7}$$

Значит, первый элемент множества A_{n+1} , A_n, получается умножением на к α^{-1} первого элемента A_n , A_{n-1}. Переходим ко второму элементу A_{n+1} , A_n. Здесь в зависимости от знака $x_{q_{n-1}+q_{n-2}}$ возможны только два случая:

1) если $x_{q_{n-1}+q_{n-2}}\in[0,\xi(0))$, то в силу (7)

$$x_{q_n+q_{n+1}+1}=T(x_{q_n+q_{n+1}})=T(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})=\xi\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})\in[x_{q_1+q_0},\xi\,(0)),$$

$$x_{q_n+q_{n+1}+2}=T(\xi\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}}))=\eta(\xi\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}}))\in[x_1,x_2),$$

$$x_{q_n+q_{n+1}+3}=T(\eta(\xi\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})))=\xi(\eta(\xi\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})))\in[x_2,x_3),$$

$$x_{q_n+q_{n+1}+k+1}=T(\xi^{k-2}(\eta(\xi(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}}))))=\xi^{k-1}(\eta(\xi\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})))=$$

$$=\alpha^{-1}\eta(x_{q_{n-1}+q_{n-2}})=\alpha^{-1}\ x_{q_{n-1}+q_{n-2}+1}\in[0,\xi(0)).$$

2) Если $x_{q_{n-1}+q_{n-2}}\in[\eta(0),0)$, то

$$x_{q_n+q_{n-1}+1}=T(x_{q_n+q_{n+1}})=T(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})=\eta(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})\in[x_1,x_2),$$

$$x_{q_n+q_{n-1}+2}=T(\eta(\alpha^{-1}x_{q_n+q_{n+1}}))=\xi(\eta(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})\in[x_2,x_3)),$$

$$x_{q_n+q_{n-1}+k+1}=\xi^{k-1}(\eta\,(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}})=\alpha^{-1}\,\xi(x_{q_{n-1}+q_{n-2}}))=\alpha^{-1}\,x_{q_{n-1}+q_{n-2}+1},$$

и т.д. Продолжим этот процесс до тех пор, пока не закончатся элементы множества A_{n+1} , A_n. Из пунктов 1) и 2) видно, что при этом для каждого элемента $x_{q_n+q_{n-1}+j}, 0\le j\le kq_n-1$ из множества A_{n+1}, A_n найдется элемент $x_{q_{n-1}+q_{n-2}+i}$ множества

$$B=\{x_{q_{n-1}+q_{n-2}}, x_{q_{n-1}+q_{n-2}+1},..., x_{q_{n-1}+q_{n-2}+p}\}$$

с некоторой $p>1$ такой, что

$$x_{q_n+q_{n-1}+j}=\alpha^{-1}\, x_{q_{n-1}+q_{n-2}+i},$$

или

$$x_{q_n+q_{n-1}+j}=\xi^{j-t}(\eta(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}+2})),\quad t\le j\le t+k-2,$$

или

$$x_{q_n+q_{n-1}+j}=\xi^{j-t}(\eta\,(\xi(\alpha^{-1}x_{q_{n-1}+q_{n-2}+i}))),\quad t\le j\le t+k-2.$$

Отметим, что когда j последовательно растет от 0 до kq_n-1, то i тоже последовательно растет от 0 до p. Мы покажем, что множество B совпадает с A_n, A_{n-1}, т.е. $p=kq_{n-1}-1$. Элементы множества A_{n+1}, A_n, лежащие на $[x_{q_1},0)$, получаются умножением элементов множества $B\cap[0,\xi(0)]$ на α^{-1}, а элементы множества $(A_n$, $A_{n-1})$, лежащие на $(0,x_{q_1+q_0}]$, получаются умножением элементов множества $B\cap(\eta(0),0]$ на α^{-1}, так как $x_{q_1+q_0}=\alpha^{-1}\eta(0)$, $x_{q_1}=\alpha^{-1}\xi(0)$. Элементы множества A_{n+1}, A_n, лежащие на $[x_{q_1+q_0},\xi(0)]$, получаются из $\xi(A_{n+1}$, $A_n)$. Отсюда следует, что

$$\#(B\cap[\eta(0),0))=\#((A_{n+1},\ A_n)\cap[0,x_{q_1+q_0}))=(k-1)(q_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}+q_{n-2}=$$
$$=k(q_{n-1}+q_{n-2}),$$

$$\#(B\cap(0,\xi(0)))=\#((A_{n+1},\ A_n)\cap[x_{q_1},0))=q_{n-1}+q_{n-2},$$

$$\#(B\cap(x_{q_1},0])=\#((A_{n+1},\ A_n)\cap[x_{q_1+q_0},\xi(0)])=kq_{n-1},$$

$$\#(B\cap(x_{q_1+q_0},\xi(0)))=\#((A_{n+1},\ A_n)\cap[\eta(0),x_2])=kq_{n-1},$$

$$\#(B\cap(\eta(0),x_2])=\#((A_{n+1},\ A_n)\cap(x_2,x_3])=kq_{n-1},$$

$\#(B\cap(x_{k-2},x_{k-1}))=\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap(x_{k-1},x_k])=kq_{n-1},$
$\#(B\cap[\eta(0),0))=\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap[0,x_{q_1+q_0}])=kq_{n-1}-kq_{n-2},$
$\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap[x_{q_1+q_0},\xi(0)])=kq_{n-2},$
$\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap[\eta(0),x_2])=kq_{n-1},$

$\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap(x_{k-1},x_k))=kq_{n-1},$

$\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap(x_k,0])=kq_{n-1},$

$\#(B\cap[0,\xi(0)])=\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n)\cap(x_{q_1},0])=kq_{n-2}.$

Используя эти равенства, получим

$\#(B\cap[\eta(0),\xi(0)])=kq_{n-1}-kq_{n-2}+kq_{n-2}=kq_{n-1}.$

Это означает, что $\#(B)=\#((A_{n+1}\ ,\quad A_n))=kq_{n-1}$. Следовательно, множество B совпадает с $A_n\ ,\quad A_{n-1}$. Теорема 2. доказана.

Обозначим $\bar{A}_m=A_m\cup\{\xi(0)\}$.

Следствие 2. Пусть n - нечетное число. Тогда

$$A_{n+m}\bigcap[x_{q_{n-1}+q_{n-2}};\,0]=\alpha^{-(n-1)}\bar{A}_m\bigcap[\eta(0);\,0],$$

$$A_{n+m}\bigcap[0;\,x_{q_{n-1}}]=\alpha^{-(n-1)}\bar{A}_m\bigcap[0;\,\xi(0)].$$

Если n - четное число, то

$$A_{n+m}\bigcap[0;\,x_{q_{n-1}+q_{n-2}}]=\alpha^{-(n-1)}\bar{A}_m\bigcap[\eta(0);\,0],$$

$$A_{n+m}\bigcap[x_{q_{n-1}};\,0]=\alpha^{-(n-1)}\bar{A}_m\bigcap[0;\,\xi(0)].$$

Доказательство следствия 2. Заметим что число α_k меньше -1 (отрицательное). Поэтому утверждение следствия 2. зависит от четности числа n. Применяя утверждение теоремы 2. n раз, мы получим утверждение следствия 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пошаходжаева Г. Термодинамический формализм для критических отображений окружности. // Уз.Мат.Журнал., 2004, №4, стр. 32-40.

2. Джалилов А. А., Пошаходжаева Г. Метрические свойства некоторых критических отображений окружности. // ДАН, 2011. №4, стр. 16-20.

3. Gulnora Poshokhodjaeva. Critical circle maps and thermodynamic formalism. // IOP. Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 819. 2017.- Impact: 0.66

4. Akhmedov, B. A., Majidov, J. M., Narimbetova, Z. A., Kuralov, Yu. A. (2020). Active interactive and distance forms of the cluster method of learning in development of higher education. Экономика и социум, 12(79), 805- 808
5. Наримбетова, З. А., Сытина, Н. (2021). Учитель-нравственный пример для ученика. Academic research in educational sciences, 2(1), 1153-1159.
6. Eshkaraev, K., Norimbetova, Z. (2020). Methodological recommendations for organizing and holding mathematical circles. European Scientific Conference, 248-250.
7. Norimbetova, Z. A. (2020). Axborot kommunikatsion texnologiyalari yordamida geometriya fanini o'qitish metodikasi (10-11-sinflar misolida). Science and Education, 1(7).
8. Narimbetova, Z. A. (2020). Matematika fanida ta'lim texnologiyalaridan foydalanish o'quvchilar tafakkurining rivojlantiruvchi omil. Academic research in educational sciences, 1(3), 1253-1261.
9. Narimbetova, Z., Makhmudova, D. (2020). Developing creative competence through the formation of scientific generalization in students. International Journal of Psychosocial Rehabilitation ISSN, 1475-7192.

10. Сытина Наталья, Наримбетова З.А. (2021). Учитель-нравственный пример для ученика. Academic research in educational sciences volume 2(1).