ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА: ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА

Баходиров Н. И.

студент 1 курса

Ташкентский государственный экономический университет

Мирходжаева Н. Ш.

старший преподаватель

Ташкентский государственный экономический университет

кафедра «Высшей и прикладной математики»

Пошаходжаева Г. Д.

доцент

Ташкентский государственный экономический университет

кафедра «Высшей и прикладной математики»

Аннотация: Проблема транспортировки является одной из важнейших оптимизационных задач в экономике и логистике. В данной статье определяется оптимальное решение транспортной проблемы. Цель — минимизировать общие транспортные расходы или максимизировать прибыль.

Ключевые слова: транспортные расходы, пункт, линия, спрос, потенциал.

TRANSPORTATION PROBLEM: DETERMINING THE OPTIMAL PLAN

Bahodirov N. I.

1st year student of TSUE
Tashkent State University of Economics

Mirhodjaeva N. S.
senior lecturer
Tashkent State University of Economics
Department of Higher and Applied Mathematics

Poshakhodjaeva G. D.
associate professor
Tashkent State University of Economics
Department of Higher and Applied Mathematics

Abstract: The transportation problem is one of the most important optimization problems in economics and logistics. This article defines the optimal solution to the transportation problem. The goal is to minimize total transportation costs or maximize profits.

Keywords: transportation costs, point, line, demand, potential.

Транспортная задача — математическая задача линейного программирования специального вида. Её можно рассматривать как задачу об оптимальном плане перевозок грузов из пунктов отправления в пункты потребления, с минимальными затратами на перевозки.

Транспортная задача по теории сложности вычислений входит в класс P полиномиальный. Когда суммарный объём предложений не равен общему объёму спроса на товары, запрашиваемые пунктами потребления, транспортная задача называется несбалансированной.

Транспортная задача. Определение оптимального плана перевозок (например, угля) сводится к решению следующей задачи:

1. Дана производственная мощность А, i- го производственного объекта (например, шахты).

2. Определены потребности В, районов в j -м пункте потребления.

3. Даны издержки с перевозки 1 т (например, угля) от i-го пункта производства до j -го пункта потребления.

Если количество объектов производства (например, мест добычи угля) обозначить m ,а пунктов потребления -n, то условия, которые должны удовлетворяться, можно записать следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} x\text{ij} = \text{Ai}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x\text{ij} = \text{Bj}$$

$$\sum_{i=1}^{m} A\text{i} = \sum_{j=1}^{n} B\text{j}$$

где xij - объем перевозок от i -го пункта производства до j-го пункта потребления, причем

$$\text{Xij} \geq 0 \ .$$

Условие (1) означает, что перевозки от i -го пункта производства до пунктов потребления равняются производственной мощности i -го производственного объекта. Условие (2) означает, что перевозки из различных пунктов производства j-му потребителю должны соответствовать его потребность. Условие (3) означает, что сумма производственных мощностей предприятий- поставщиков равняется суммарной потребности получателей. Если это условие не выполняется, то задачу можно сформулировать несколько иначе: так, чтобы условие выполнялось в случае, когда предложение превышает спрос. Достаточно добавить условный пункт потребления, спрос которого равняется, разности суммарных производственных мощностей и общего спроса. В качестве удельных расходов на перевозки от отдельных пунктов поставок до условного пункта потребления принимается нуль; это означает, что продукция, доставляемая в условный пункт потребления, в действительности никуда не перевозится.

Решение задачи сводится к отысканию минимума линейной формы (целевой функции)

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c\text{ijxij} \ , (5)$$

причем должны выполняться условия (1)-(4).

В рассматриваемом случае критерием оптимизации принимаются транспортные расходы. Иногда целесообразно бывает принять иной критерий оптимальности, например объем работы по перевозкам (в тонно-километрах).

Другой пример транспортной задачи - оптимальное распределение транспортных средств по отдельным линиям (трассам). Такое распределение может быть применено для каждого вида транспорта.

Введем обозначения: xij - количество единиц i-го транспортного средства (например, автомобили разной грузоподъемности), предназначенного для обслуживания j-й линии, pij- количество продукция, которое i-е транспортные средства могут перевезти на j-й линии, cij - издержки использования i-го транспортного средства на j- й линии, ai- общее количество единиц транспортного средства i-го типа, bj - количество продукции, которое должно быть перевезено на j-й линии.

Предположим также, что количество линий составляет n, и что мы располагаем m типами транспортных средств. Поскольку может случиться, что некоторое количество отдельных типов транспортных средств не будет использовано, вводится условная (n+ 1)-я линия (трасса).

Распределение разных транспортных средств между отдельными линиями должно соответствовать условиям:

$$x11 + x12 + \ldots + x1n + x1,n + 1 = a1 \ ,$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + x_{2,n+1} = a_2, \quad (6)$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} + x_{m,n+1} = a_m,$$

Эти условия означают, что количество транспортных средств, распределенных по отдельным линиям, должно равняться общему количеству имеющихся транспортных средств.

Разность между потребностью и фактическим объемом перевозок на j-й линии обозначим $x_{m+1,j}$. При этом должны выполняться условия

$$p_{11}x_{11} + p_{21}x_{22} + \dots + p_{m1}x_{m1} + x_{m+1,1} = b_1,$$

$$p_{21}x_{12} + p_{22}x_{22} + \dots + p_{m2}x_{m2} + x_{m+1,2} = b_2, \quad (7)$$

$$p_{1n}x_{1n} + p_{2n}x_{2n} + \dots + p_{mn}x_{mn} + x_{m+1,n} = b_n,$$

Каждое из уравнений (7) указывает, что количество продукции, перевезенное отдельными транспортными средствами, с добавлением возможного количества неперевезенной продукции равняется общей потребности в перевозках на данной линии.

Суммарные транспортные расходы составляют:

$$Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + 0 \,.\, X_{1,n+1} +$$

$$+ c_{21}x_{21} + c_{21}x_{22} + \dots + c_{2n}x_{2n} + 0 \,.\, X_{2,n+1} + \quad (8)$$

$$+ c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} + 0 \,.\, X_{m,n+1} + c_{m+1,1}x_{m+1,1} +$$

$$+ c_{m+1,2}x_{m+1,2} + \dots + c_{m+1,n}x_{m+1,n} + 0 \,.\, X_{n+1,m+1}\,.$$

Решение задачи состоит в отыскании таких значений x_{ij}, которые минимизируют целевую функцию (8) при условии, что переменные удовлетворяют ограничениям (6) и (7).

Теперь мы решим задачу:

Пример 1. Две базы, собирающие излишки яблок на заданной территории, снабжают три города: 1, 2 и 3. Суточная потребность городов в яблоках составляет 300, 200 и 200 т соответственно. Базы могут доставлять 300 и 400 тонн яблок соответственно. Стоимость перевозки 1 тонны яблок в каждый город (в десятках денежных единиц) приведена в таблице.

От базы	До города		
	1	2	3
1	6	4	4
2	3	5	6

Рассчитать план перевозок, при котором сводятся к минимуму транспортные расходы.

Определим xij как объем перевозки яблок из i-базы в j-город.Эти объемы можно представить в следующей таблице:

От базы	До города		
	1	2	3
1	X11	X12	X13
2	X21	X22	X23

Поскольку база 1 может обеспечить мощность 300 т,

$$x11 + x12 + x13 = 3 \text{ (сотни тонн)},$$

а поскольку база 2 может поставить 400 т яблок,

$$x21 + x22 + x23 = 4 \text{ (сотни тонн)}.$$

Из потребностей городов следует, что (в сотнях тонн):

$$x11 + x21 = 3,$$

$$x12 + x22 = 2,$$

$$x13 + x23 = 2.$$

Суммарные транспортные расходы составляют:

$Z = 6x11 + 4x12 + 4x13 + 3x21 + 5x22 + 6x23$.

Следует рассчитать неизвестные xij так, чтобы удовлетворялась приведенная система уравнений и одновременно целевая функция z принимала минимальное значение.

Введем обозначения:

$x11 = x1$, $x12 = x2$, $x13 = x3$, $x21 = x4$, $x22 = x5$, $x23 = x6$.

Тогда получим следующую систему уравнений:

$$x1 + x2 + x3 = 3 \ (1)$$

$$x4 + x5 + x6 = 4 \ (2)$$

$$x1 + x4 = 3 \ (3)$$

$$x2 + x5 = 2 \ (4)$$

$$x3 + x6 = 2 \ (5)$$

$$-6x1 - 4x2 - 4x3 - 3x4 - 5x5 - 6x6 = -z \ (6)$$

Из уравнения (3) получаем:

$$x4 = 3 - x1,$$

из уравнения (4)

$$x2 = 2 - x5,$$

из уравнения (5)

$$x3 = 2 - x6.$$

Подставляя эти величины в уравнение (1), получаем:

$$x1 + 2 - x5 + 2 - x6 = 3 ,$$

или $x1 - x5 - x6 = -1$,

откуда $-x1 + x5 + x6 = 1$. (7)

Произведя те же подстановки в уравнении (2), получим:

$$3 - x1 + x5 + x6 = 4,$$

Откуда $-x1 + x5 + x6 = 1$,

т. е. условие, идентичное (7).

Подставляя x1, x2, x3, x4 в уравнение (6), получаем:

$$-6x1 - 4(2 - x5) - 4(2 - x6) - 3(3 - x1) - 5x5 - 6x6 = -z,$$

Откуда $-3x1 - x5 - 2x6 = -z + 25$. (8)

Из условия (7) находим: $x5 = 1 + x1 - x6$ и подставляем это значение в уравнение (8): получаем : $-4x1 - x6 = -z + 26$, откуда

$$Z = 26 + 4x1 + x6 .$$

Целевая функция Z принимает минимальное значение 26, если x1 = x6 = 0.

Тогда x4 = 3 – x1 =3, x3 = 2 – x6 = 2.

Из уравнения (1) получим:

x1 + x2 + x3 = 3, или

0 + x2 + 2 = 3,

Откуда x2 = 1 .

Из уравнения (4) получаем:

x5 = 2 – x2 =1 .

Следовательно, оптимальный план перевозок таков:

С базы снабжения	В город			Итого
	1	2	3	
1	x1 = 0	x2 = 1	x3 = 2	3
2	x4 = 3	x5 = 1	x6 = 0	4
Итого	3	2	2	

Рассчитаны минимальные транспортные расходы. Вычислим затрату подставив исходные данные:

Z¿$4 \times 100 + 4 \times 200 + 3 \times 300 + 5 \times 100 = 2600$ десятка денеж.ед.

А теперь проверим ответ методом потенциалов :

Мы можем заполнить таблицу числами, указанными в условии задачи .

	300	200	200		
300	6 -4	4 100	4 200		U1 = 0
400	3	5		-1	U2 =1

	300	100			
	V1 = 2	V2 = 4	V3 = 4		

Поскольку число потенциалов равно пяти, то за ноль примем произвольный (например U1 = 0).

Остальные потенциалы можно найти через U1 (Ui + Vj = Cij) .

V2 + U1 = 4 V2 = 4

V3 + U1 = 4 V3 = 4

V2 + U2 = 5 U2 = 1

V1 + U2 = 3 V1 = 2

Первоначальные потенциалы определялись через базовые ячейки, теперь этими потенциалами заполним пустые ячейки . ∆ij = (Ui + Vj) – Cij

(2 + 0) -6 = -4<0

(4 + 1) -6 = -4<0

Из этих вычислений доказано, что выбранный опорный план оптимальный.

Заключение : Оптимальный транспортный план рассчитан. Вы можете увидеть его по таблице и последовательности уравнений, приведенных выше. Цель расчета — найти минимальные затраты.

Использованная литература :

1. Х. Э. КРЫНЬСКИЙ . МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ // Рассчитать оптимальный транспортный план . – С 303 -305 ,326 -328 .

2. https://ru. wikipedia.org /wiki/ Транспортная_задача .