Аширалыева А. Н.
преподаватель
Международный университет гуманитарных наук и развития
Туркменистан, г. Ашгабад
Иламанов Б. Б.
преподаватель
Гарлыева С. Г.
студентка 5-го курса
Туркменский государственный университет имени Махтумкули
Туркменистан, г. Ашгабад

Сходимость последовательных приближений к интегрофункциональным уравнениям Вольтерра в пространстве интегрируемых функций

Аннотация: В данной работе исследуется сходимость последовательных приближений для решения интегрофункционального уравнения Вольтерра в пространстве интегрируемых функций. Рассматривается уравнение вида (1), для которого строятся последовательные приближения (2). Доказывается теорема, обеспечивающая равномерную сходимость этих приближений к единственному решению уравнения при выполнении определенных условий на функции F(t,x,y) и K(t,s,x). Приводится доказательство неравенства (4), подтверждающего сходимость. В качестве частного случая рассматривается уравнение Вольтерра и показывается, что приближения также сходятся к единственному решению с определенной скоростью.

Ключевые слова: сходимость, интегрофункциональные уравнения, уравнение Вольтерра, последовательные приближения, пространство интегрируемых функций.

Ashyralyyeva A. N.
teacher
International University for Humanities and Development
Turkmenistan, Ashgabat
Ilamanov B. B.
teacher
Garlyyeva S. G.
5th year student
Magtymguly Turkmen State University
Turkmenistan, Ashgabat

Convergence of consecutive approximations to integumental Volterra equations in the space of integrable functions

Resume: This paper investigates the convergence of successive approximations for solving the Volterra integro-functional equation in the space of integrable functions. The equation of type (1) is considered, for which successive approximations (2) are constructed. A theorem is proven that ensures the uniform convergence of these approximations to the unique solution of the equation, provided certain conditions on the functions F(t,x,y) and K(t,s,x) are met. The inequality (4) confirming the convergence is demonstrated. As a special case, the Volterra equation is examined, showing that the approximations converge to the unique solution at a specific rate

Keywords: convergence, integro-functional equations, Volterra equation, successive approximations, space of integrable functions.

В этой работе рассматривается интегрофункциональное уравнение вида:

$$x_{(t)=}F\big(t,x(t)\big),\int_0^t K\,\big(t,s,x(s)\big)ds)\ (0\le t\le T)\quad (1)$$

Построим последовательные приближения для единственного решения интегрофункционального уравнение (1):

$$x_n(T) = F\left(t, x_n(t), \int_0^t k\ \big(t, s, x_{n-1}(s)\big) ds\right) n = 1,2, \dots \quad (2)$$

к решению интегрофункционального уравнения и анализируем на сходимость.

Теорема. Пусть, $F(t,x,y)(0 \le t\ \le T;\ x, y \in \mathbb{R}^1),\ K(t,s,x)$

$(0 \le t, s \le T;\ x \in \mathbb{R}^1)$ измеримые функции удовлетворяют условию:

$$|F(t,\bar{x},\bar{y}) - F(t,x,y)| \le L_1|\bar{x} - x| + L_2|\bar{y} - y|\,,$$

$$|K(t,s,x) - K(t,s,y)| \le L_3|x - y| \quad (3)$$

где $L_i = const \ge 0\ (i = 1,2,3)$ причем $L_1 < 1$

Тогда последовательные приближения (2) равномерно на отрезке $[0, T]$ сходятся к единственному решению интегрофункциональному уравнению (1), при этом

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{\left(\frac{L_2 L_3 T}{1 - L_1}\right)^n}{n!} \|x_0 - x^*\|, \qquad n = 1,2, \dots, \quad (4)$$

где $x^*(t)$ – единственное решение уравнение (1).

Доказательство. Из условиях этой теоремы единственное решение интегрофункционального уравнения (1) доказано в работе [1].

Для доказательства теоремы достаточно показать неравенство (4). Из (1) и (2) с условиями (3) получим:

$$|x_n(t) - x^*(t)| =$$

$$= \left|\Phi\left(t, x_n(t), \int_0^t K\ \big(t, s, x_{n-1}(s)\big) ds\ \right) - \Phi\left(t, x^*(t), \int_0^t K\ \big(t, s, x^*(s)\big) ds\ \right)\right| \le$$

$$\le L_1|x_n(t) - x^*(t)| + L_2\left|\int_0^t K\ \big(t, s, x_{n-1}(s)\big) ds - \int_0^t K\ \big(t, s, x^*(s)\big) ds\ \right| \le$$

$$\leq L_1|x_n(t)-x^*(t)|+L_2L_3\int_0^t|x_{n-1}(s)-x^*(s)|\,ds,$$

$$|x_n(t)-x^*(t)|\leq L_1|x_n(t)-x^*(t)|+L_2L_3\int_0^t|x_{n-1}(s)-x^*(s)|\,ds.$$

Из этого неравенства получаем:

$$|x_n(t)-x^*(t)|\leq\frac{L_2L_3}{1-L_1}\int_0^t|x_{n-1}(S)-x^*(s)|\,ds,\qquad n=1,2,\ldots\quad(5)$$

При $n=1$ из (5) получим:

$$|x_1(t)-x^*(t)|\leq\frac{L_2L_3}{1-L_1}\int_0^t|x_0(s)-x^*(s)|\,ds\leq\frac{L_2L_3}{1-L_1}\|x_0-x^*\|.$$

При $n=2$ получим:

$$|x_2(t)-x^*(t)|\leq\frac{L_2L_3}{1-L_1}\int_0^t|x_1(s)-x^*(s)|\,ds\leq\left(\frac{L_2L_3}{1-L_1}\right)^2\|x_0-x^*\|t.$$

Предположим, что при $n=k$ верно следующее неравенство:

$$|x_k(t)-x^*(t)|\leq\left(\frac{L_2L_3}{1-L_1}\right)^k\|x_0-x^*\|\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

При $n=k+1$ из (5) следует:

$$|x_{k+1}(t)-x^*(t)|\leq\frac{L_2L_3}{1-L_1}\int_0^t|x_k(s)-x^*(s)|\;ds\leq$$

$$\leq\left(\frac{L_2L_3}{1-L_1}\right)^{k+1}\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t S^{k-1}\,dS=(\frac{L_2L_3}{1-L_1})^{k+1}\frac{t^k}{k!}.$$

Используя метод математической индукции для любого натурального n верно неравенство:

$$|x_n(t) - x^*(t)| \le \frac{\left(\frac{L_2 L_3}{1 - L_1}\right)^n t^{n-1}}{(n-1)!} \|x_0 - x^*\|, \qquad n = 1,2, \dots \ .$$

Применяя в пространстве $L[0, T]$ норму $\|x\| = \int_0^t |x(t)|\, dt$, получим:

$$\|x_n - x^*\| = \int_0^t |x_n(S) - x^*(s)| ds \le \frac{\left(\frac{L_2 L_3}{1 - L_1}\right)^n}{(n-1)!} \|x_0 - x^*\| \int_0^t s^{n-1}\, dS =$$

$$= \frac{\left(\frac{L_2 L_3}{1 - L_1} t\right)^n}{n!} \|x_0 - x^*\|.$$

Из этого неравенство следует неравенство (4).

Теперь рассмотрим частный случай уравнение (1), уравнение Вольтерра:

$$x(t) = x_0(t) + \int_0^t K\big(t, s, x(s)\big) ds \ \ (6)$$

На условиях доказанной теоремы приближения:

$$x_n(t) = x_0(t)^+ \int_0^t K\big(t, s, x_{n-1}(s)\big) ds \,, n = 1,2, \dots$$

сходятся к единственному решению уравнения Вольтерры (6) на пространстве $L[0, T]$ со скоростью:

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{(L_3 T)^n}{n!} \big| |x_0 - x^*| \big|$$

Использованные источники:

1. Annaýew K., Haýdarowa O., Oreýew M. Integrirlenýän funksiýalaryň giňişliginde Wolterra integrofunksional deňlemäniň çözüwiniň häsiýetleri. Türkmenistanyň Bilim ministrliginiň “Bilim” ylmy-usuly žurnaly. №4, 2022.

2. Musa Yazymov, Ashyrgul Ashyralyyeva. Properties of solutions of multivariate integro-functional equations of Volterra-Fredholm type in the space of $C[-1, 1 + a]$. Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians. 20-23 September 2023, Turkestan, Kazakhstan.

3. Gurbanmammedov N., Ashyralyyeva A. Properties of solutions of multivariate integro-functional equations of Volterra-Fredholm type. Bilim, Vol.1, №1, 2021, pp. 56-62.

4. Ashyrgul N. Ashyralyyeva, Agaserdar K. Yollyyev. Some properties of the solution of the nonlinear multidimensional Volterra integro-functional equation. 7th International Conference on Analysis and Applied Mathematics. 23-28 September 2024, Antalya, Turkiye.