BA'ZI BIR XOSMAS INTEGRALLARNI EYLER INTEGRALLARI YORDAMIDA HISOBLASH

Usmonov Baxtiyor Zoxirovich

Katta o'qituvchi, Chirchiq davlat pedagogika institute,Toshkent , O'zbekiston

Qobilov Tursunboy Abdullo o'g'li

O'qituvchi, Chirchiq davlat pedagogika institute,Toshkent ,O'zbekiston

Aktamov Feruz Sanaqulovich

O'qituvchi, Chirchiq davlat pedagogika institute,Toshkent ,O'zbekiston

Annotatsiya: *Ushbu maqolada Betta va Gamma funksiyalarni xossalaridan foydalanib xosmas integrallarni yechish haqida ma'lumotlar keltirilgan. Murakkab xosmas integrallarni Eyler integrallari yordamida yeshish usullari qarab chiqilgan.*

Kalit ***so'zlar:*** *betta funksiya, gamma funksiya, xosmas integral,integral.*

CALCULATION OF SOME INDIVIDUAL INTEGRALS WITH THE USE OF EYLER INTEGRALS

Bakhtiyor Zokhirovich Usmonov

Senior teacher of Chirchik State Pedagogical Institute of Tashkent region

Qobilov Tursunboy Abdullo o'g'li

Teacher of Chirchik State Pedagogical Institute of Tashkent region

Aktamov Feruz Sanaqulovich

Teacher of Chirchik State Pedagogical Institute of Tashkent region

Abstract: *This article provides information on solving nonlinear integrals using the properties of Betta and Gamma functions. Methods for solving complex nonlinear integrals using Euler integrals are considered.*

Keywords: *betta function, gamma function, hosmas integral, integral*

KIRISH

Hozirgi zamonaviy ta'lim jarayonida o’quvchi talabalarni har tamonlama yetuk mutaxasis bo’lib yetishish uhcun yurtumizda kata kulamdagi ishlar olib borilmoqda. O’quvchi talabalarni uz sohasini mukammal egalashi uchun o’tiladigan har bir fan va har bir mavzuni tadbiqlarini bilishi zamon talabi bo’lib qolmoqda. Buning uchu o’quvchi talabalarga dars jarayonida har bir mavzu tadbiqlariga kata ahamiyat qaratish kerak bo’ladi. O’quvchi talabalarga matematik analiz fanining o’tishda ba’zi mavzularida qiyinshiliklar uchrab turadi. Ya’ni matematik analiz fanini xosmas integrallar mavzusiga doir tushunchalarni o’rganishda ba’zi misollarda qiyinchiliklar hosil bo’ladi. Shu qiyinchiliklarni bartaraf etishda xosmas integrallar mavzusini boshqa mavzular orasida fanlararo integratsiya kata ahamiyatga egadir.

Ushbu ishda xosmas integrallarni hisoblashda Eylerning 1-tur va 2-tur integrallari xossalaridan foydalanishga doir ma’lumotlar keltirilgan. Xosmas integrallarga doir bir nechta misollarni Gamma va Betta funksiyalaridan foydalanib yechish ko’rsatilgan.

Quyidagi ishlarda ham fanlararo integratsiya katta ahamiyat qaratilgan.[**Ошибка! Источник ссылки не найден.**],[2],[5],[**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] ishlarda matematika va informatika fanlari orasidagi fanlararo integratsiyaga katta e’tibor qaratilgan. [3],[4],[**Ошибка! Источник ссылки не найден.**],[**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] ishlarda algebra va geometriya fanlari orasidai integratsiya misollar yordamida ko’rsatilgan. [6],[7],[8],[9],[10],[11],[12],[13],[14],[15],[16],[17], [18],[19] ishlarda matematika, mexanika va fizika fanlari orasida integratsiyalarni ko’rsatib o’tilgan.

Tadqiqot ob’ekti va qo‘llaniladigan metodlar

Tadqiqot ob'ekti sifatida xosmas integrallarni Eyler integrallari yordamida yechish. Tadqiqot metodlari: masalani yechishning aniq usullari, taqribiy-aniq usullari va sonli usullari.

Olingan natijalar va ularning tahlili

Eyler integralari haqida teorima va xossalarida foydalanib xosmas integrallarni yechishni keltiramiz. Betta va Gamma funksiya haqidagi tushunchalarni keltirib o'tamiz.

Ushbu

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \qquad (a>0, b>0) \tag{1}$$

xosmas integral *Betta funksiya* yoki *1-tur Eyler integrali* deyiladi va $B(a,b)$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\,. \tag{2}$$

Integral ostidagi funksiya uchun:

1) $a<0, b\geq 0$ bo'lganda $x=0$ nuqta;

2) $a\geq 1, b<1$ bo'lganda $x=1$ nuqta;

3) $a<1, b<1$ bo'lganda $x=0$ va $x=1$ nuqtalar maxsus nuqtalar bo'ladi.

Demak, (1) integral parametrga bog'liq bo'lgan xosmas integraldir.

Betta funksiya quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. (1) integral

$$M=\{(a;b)\in R^2 : a\in(0;+\infty), b\in(0;+\infty)\}$$

to'plamda yaqinlashuvchi.

2-xossa. (1) integral $M_0=\{(a;b)\in R^2 : a\in[a_0;+\infty), b\in[b_0;+\infty)\}, a_0>0, b_0>0$ to'plamda tekis yaqinlashuvchi, lekin M to'plamda esa notekis yaqinlashuvchi.

3-xossa. $B(a,b)$ funksiya M to'plamda uzluksiz funksiyadir.

4-xossa. $\forall(a,b)\in M$ uchun $B(a,b)=B(b,a)$ (simmetrik) bo'ladi.

5-xossa. $B(a,b)$ funksiya quyidagicha ham ifodalanadi:

$$B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt$$

Isbot:

$$B(a;b)=\int_0^1 x^{a-1}\cdot(1-x)^{b-1}dx=\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{1-x}=t\\ x=t-tx\\ x+tx=t\\ x\cdot(1+t)=t\\ x=\dfrac{t}{1+t}\\ dx=\dfrac{t+1-t}{(1+t)^2}dt=\dfrac{dt}{(1+t)^2}\\ 1-x=1-\dfrac{t}{1+t}=\dfrac{1}{1+t}\end{array}\right]$$

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1}\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)^{b-1}\cdot\frac{dt}{(1+t)^2}=\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a-1}}\cdot\frac{1}{(t+t)^{b-1}}\cdot\frac{dt}{(1+t)^2}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b-2+2}}dt=\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}dt.$$

xossa isbotlandi.

6-xossa. $\forall(a,b)\in M_1=\{(a,b)\in R^2:a\in(0;+\infty),b\in(1;+\infty)$ uchun

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}\cdot B(a,b-1)$$

7-xossa. $B(a,1-a)=\dfrac{\pi}{\sin a\pi}(0<a<1)$**,** xususiy holda $a=\dfrac{1}{2}$ bo'lganda,

$$B=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

Gamma funksiya va uning xossalari.

Ushbu

$$\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (a>0) \qquad (3)$$

xosmas integral *Gamma funksiya* yoki 2-tur *Eyler integrali* deyiladi va quyidagicha belgilanadi, yani

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx \qquad (a>0) \tag{4}$$

Integral ostidagi funksiya uchun:

1) $a<1$ bo'lganda $x=0$ nuqta maxsus nuqta;

2) $a>1$ bo'lganda (3) integral yaqinlashuchi;

3) $a\leq 0$ bo'lganda (3) integral uzoqlashuvchi;

Gamma funksiya quydagi xossalarga ega.

1-**xossa.**

$$\Gamma(a)=\lim_{n\to\infty} n^a\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{a(a=1)\cdots(a+n+1)}. \tag{5}$$

(5) formula *Eyler-Gauss* formulasi deyiladi.

2-xossa. (3) integral $\forall a\in[a_0,b_0]\,(0<a_0<b_0<+\infty)$ oraliqda

tekis yaqinlashuvchi, $a\in(0,+\infty)$ da esa notekis yaqinlashuvchi.

3-xossa. $\Gamma(a)$ funsiya $(0;+\infty)$ oraliqda uzluksiz va barcha tartibdagi uzluksiz hosilalarga ega, ya'ni

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{x}(\ln x)^n dx \quad (n\in N).$$

4-xossa. $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a) \quad (a>0).$

5-xossa. $\Gamma(n+1)=n!$

6-xossa. $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$

7xossa. $\Gamma(a)\Gamma(1-a)=B(a,1-a)=\dfrac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0<a<1.$

8-xossa. $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad n\in N.$

9-xossa. Lejandr formulasi: $\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$

Endi yuqoridagi betta va gamma funksiyalar yordamida ba'zi bir xosmas integrallarni hisoblashga doir bir nechta misollarni ko'rib chiqamiz.

1-misol. Eyler integralidan foydalanib quydagi xosmas integralni hisoblang.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}$$

Yechilishi. Bu integralda $\frac{x}{2-x}=t$ almashtirish orqali quyidagi integralni hosil qilin, keyin uning qiymatini hisoblaymiz.

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{2-x}=t, \\ x=2t-tx, \\ x\cdot(1+t)=2t \\ x=\frac{2t}{1+t} \\ dx=\frac{2\cdot(1+t)}{(1+t)^2}dt=\frac{2}{(1+t)^2}dt \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty}\frac{2dt}{(1+t)^2\cdot\sqrt[3]{(\frac{2t}{1+t})^2\cdot(2-\frac{2t}{1+t})}}=\int_0^{\infty}\frac{2dt}{(1+t)^2\cdot\sqrt[3]{\cdot\frac{4t^2}{(1+t)^2}\cdot\frac{2}{1+t}}}=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2dt}{(1+t)^2\cdot\frac{2}{t+1}\cdot t^{\frac{2}{3}}}=\left[qisqartirishlarni\ \ amalga\ \ oshirib\right]=\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{-2}{3}}}{1+t}dt=\int_0^{\infty}\frac{t^{1-\frac{2}{3}-1}}{1+t}dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{1}{3}-1}}{(1+t)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}dt=B(\frac{1}{3};\frac{2}{3})=\left[Betta\ \ funksiyaning\ 7-xossasiga\ \ asosan\right]=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

2-misol. Ushbu $\int_0^{\infty}x^4\cdot e^{-x^2}dx$ xosmas integralni Eyler integrali yordamida hisoblang.

Yechilishi. Bu integralda $x^2=t$ almashtirish orqali quyidagi integralni hosil qilamiz va qiymatini hisoblaymiz.

$$\left[\begin{array}{l} x^2=t, \\ x\to 0\ \ da\ \ t\to 0,\ \ x\to\infty\ \ da\ \ t\to\infty \\ x=\sqrt{t} \\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \\ x^4=t^2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} t^2\cdot e^{-t}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\infty} t^{\frac{5}{2}-1}\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=$$

$$=\left[Gamma\ \ funksiyaning\ 8-xossasiga\ asosan\right]=\frac{1}{2}\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot 2-1)!!}{2^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3!!}{4}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

3-misol. Eyler integrallaridan foydalanib, integralni hisoblang.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cos^6 xdx=\left[\begin{array}{ll} \sin x=\sqrt{x}, & x\to 0\ da\ t\to 0 \\ x=\arcsin\sqrt{t}, & x\to\dfrac{\pi}{2}\ da\ t\to 1 \\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{1-t}\cdot 2\sqrt{t}} & \end{array}\right]=\int_0^1 t^2(1-t)^3\frac{dt}{\sqrt{1-t}\cdot 2\sqrt{t}}=$$

$$=\left[soddalashtiramiz\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{5}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{1+\frac{3}{2}-1}\cdot(1-t)^{1+\frac{5}{2}-1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}-1}\cdot(1-t)^{\frac{7}{2}-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2}B(\frac{5}{2};\frac{7}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{7}{2})}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(6)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(2+\frac{1}{2})\cdot\Gamma(3+\frac{1}{2})}{5!}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{(2\cdot 2-1)!!}{2^2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{(2\cdot 3-1)!!}{2^3}\cdot\sqrt{\pi}}{5!}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{3!!}{4}\cdot\sqrt{\pi}\cdot\frac{5!!}{8}\cdot\sqrt{\pi}}{120}=\frac{1\cdot 3\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\pi}{64\cdot 120}=\frac{3\pi}{64\cdot 8}=\frac{3\pi}{512}$$

Xulosa qilib aytganda o’quvchi talabalar ba’zi bir xosmas integrallarni yechishda qiyinchiliklarga duch keladi. Shunga uxshash qiyinchiliklarni bartaraf etish uchun Eyler integrallaridan foydalanib xosmas integrallarni yechish o’quvchi talablarga ancha qulayliklar keltiradi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. B.Z.Usmonov, G.Sh.Togayeva, M.A.Davlatova "O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli differentsial tenglamalarini o'qitishda matematik paketlarni o'rni"./ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 3 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

2. G.U.Suyunova., B.Z.Usmonov. "BIOLOGIYA FANINI O'RGATISHDA AXBOROT-KOMMUNIKATSIYA TEXNOLOGIYALARI O'RNI VA VAZIFALARI". /ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 3 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

3. B.Z.Usmonov, T.A.Qobilov "Isbotlashlarda taqqoslamalar ning o'rni" "./ ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 5 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

4. Kutlimurotov, R. A., Usmonov, B. Z., Toshbayeva, N. Y., & Eshqorayev, Q "CHEKLI ZANJIRLI KASRLARNI BAZI MASALALARGA TADBIQI." "./ ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 5 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

5. B.Z.Usmonov, G.Sh.Togayeva, M.A.Davlatova "BIR JINSLI TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN II- CHEGARAVIY MASALANI FURE USULIDA YECHISHDA MATEMATIK PAKETLARNING ROLI"./ ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 4 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

6. **Исломов Б.И., Усмонов Б. З**. Аналог задачи Геллерстедта для одного класса уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа. \\ «Узбекский математический журнал». 2017. № 4. С. 51-57 .

7. **Islomov B. I.,Usmonov B.Z.** Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type. // " Labachevskii Journal of Mathematics".2020. Vol. **41**. No 1. pp. 32-38.DOI: 10. 1134/ S19950802200 10060.

8. **Усмонов Б. З.** Обобщения задачи Трикоми для одного класса уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа с разрывными условиями. // БухДУ илмий ахборотномаси, 2019 йили, №4.

9. **Исломов Б. И., Усмонов Б. З.** Локальная краевая задача для одного

класса уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа . // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика" 2020. № 3

10. **Усмонов Б. З.** Нелокальная краевая задача для уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболическим оператором. //Булитин Институт Математики. 2020. № 2.

11. **Исломов Б.И., Усмонов Б. З**. “Краевые задачи для одного класса уравнения третьего порядка с эллиптико-гиперболического оператором”// Самду Илмий ахборатномаси. 2020. №3

12. Bozor Islomovich Islomov, Bakhtier Zokhirovich Usmonov. ”Local boundary value problem for a class of third-order elliptic-hyperbolic type equation” //Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya" Matematika. Mekhanika. Fizika" 2020. № 3

13. **Исломов Б.И., Усмонов Б. З**. Краевая задача для одного класса уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Лаврентьева-Бицадзе. //Тезисы докладов «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент. 2017. С.43-44

14. **Исломов Б.И., Усмонов Б. З**. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка с оператором Лаврентьева-Бицадзе// Материалы международной научно конференции

«Дифферинциальные уравнения и смежные проблемы», 25-29 июня 2018 год, 238-240

15. **Усмонов Б. З**. Краевая задача типа задачи бицадзе-самаррского для уравнения смешанного типа третьего порядка эллиптико-гиперболического типа.// Abstracts of the International Conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. September 17-20, 2018, Samarkand, Uzbekistan, 56-60.

16. **Усмонов Б. З**. Краевая задача для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа. // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи» Самарканд,2-4 октября,2019.128-129 .

17. **Исломов Б.И., Усмонов Б. З**. Нелокальная краевая задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа третьего порядка, когда главную часть оператора содержит производную по y // Узбекско-Российская научная конференция «Неклассические уравнения математичиской физики и их приложения». 24-26 октября 2019 года Тошкент,Узбекистан.

18. **Усмонов Б. З**. Краевая задача для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа . // Международная научной конференции. «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики»/ 12-13 марта, 2020 год Фаргана.

19. **Исломов Б.И., Усмонов Б. З**. Краевая задача для уравнения, составляющими из произведения не перестановочных дифференциальных операторов в прямоугольной области.// Of the Uzbekistan-Malaysia international online conference “COMPUTATIONAL MODELS TECHNOLOGIES”. August 24-25,2020

20. Usmonov B.Z., Islomov S.M.,Toshbayeva, N. Y. “GEOMETRIK MASALALARNI YECHISHDA BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI ROLI” ”./ ACADEMIC RESEARCH IN

EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 6 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

21. Usmonov B. Z., Qobilov T.A.,, Begliyev I.G'. "FIZIK MASALALARNI YECHISHDA BIRINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI ROLI" ./ ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 6 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723

22. Кутлимуротов А.Р.,Усмонов Б.З., Дармонова А. "РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ"./ ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 6 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723