Кадиров Ферузбек
Студент
Ташкентского Государственного Экономического Университета
Узбекистан, Ташкент
Матчанова Севара
Студентка
Ургенчского филиала ТАТУ
факультета Компьютерный инжиниринга
Ургенч, Узбекистан.
Пошаходжаева Г. Д.
Доцент
Ташкентского Государственного Экономического Университета
Узбекистан, Ташкент.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ЭКОНОМИКЕ

Аннотация. В данной работе мы изучали решения экономических задач с помощью производной функции. Понятие производной широко употребляются в задачах о приросте доходов, приросте спроса, прироста предложений.

Ключевые слова: предельные издержки, эластичность функции, выручка, производная, эластичность спроса, цена, предложение, средние затраты.

Kadirov Feruzbek
Student
Tashkent State University of Economics
Tashkent, Uzbekistan
Matchanova Sevara
Student

Urgench Branch of TUIT
Faculty of Computer Engineering
Urgench, Uzbekistan
Poshahodjayeva G. D.
Associate Professor
Tashkent State University of Economics
Tashkent, Uzbekistan

APPLICATION OF THE CONCEPT OF DERIVATIVE IN ECONOMICS

Abstract: This paper explores the use of derivatives in solving economic problems. The concept of the derivative is widely applied in tasks related to the increase of income, demand, and supply.

Keywords: marginal costs, function elasticity, revenue, derivative, demand elasticity, price, supply, average costs.

Экономический смысл производной состоит в том, что она выступает как скорость изменения некоторого экономического процесса с течением времени или по отношению к другому исследуемому фактору например:

Издержки производства K однородной продукции есть функция количество продукции x. Поэтому можно записать:

$$K=K(x).$$

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Продукция $x+\Delta x$соответствуют издержки производство продукции

$$K\ (x+\Delta x).$$

Следовательно, приращению количества продукции Δx соответствует приращение издержек производства продукции

$$\Delta K=K(x+\Delta x)-K(x).$$

Среднее приращение издержек производства есть

$$\frac{\Delta K}{\Delta x}$$

Это есть при

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$$

называется предельными издержками производства.

Аналогично, если мы обозначим через U (x) выручку от продажи x единиц товара, то предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = U'(x)$$

мы будем называть предельной выручкой.

ПРИМЕР 1. Издержки производства K зависит от объема продукции x по формуле

$$K = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

Определить предельные издержки, если объем производства составляет: a) 10 единиц ; b) 15 единиц продукции.

ИМЕЕМ:

$$K' = 100 - \frac{1}{10}x^2,$$

откуда

$K'(10) = 100 - \frac{1}{10} \cdot 10^2 = 90; K(15) = 100 - \frac{1}{10} \cdot 15^2 = 77,5.$

Это означает, что при объеме производства в 10 единиц продукции издержки по изготовлению следующей (одиннадцатой) единицы продукции составит 90, при объеме производства в 15 единиц они составят 77,5.

ПРИМЕР 2. Функции цен спроса на какой-либо товара определяется формулой

$$\rho = 15 - 3x,$$

где $x-$¿ спрос, а $\rho-$¿ цена.

Выручка от продажи товара есть

$$u = x(15 - 3x) = 15x - 3x^2$$

откуда $u' = 15 - 6x$. Если, например, $x = 2$, то $u'(2) = 3$.

Это означает, что если спрос возрастет с 2 до 3 единиц, то выручка возрастет приблизительно на 3 единицы.

2. Эластичность функции – это показатель, который показывает, как одна величина изменяется относительно изменения другой. Во многих задачах удобнее исчислить процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующее проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции (иногда ее называют относительной производной)

Дана функция $y=f(x)$. Предположим, что приращение независимой переменной xесть Δx,а относительное приращение зависимой переменной $x\,есть\,\frac{\Delta x}{x}$.Соответствующие приращение зависимой переменной есть

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

а относительное приращение зависимой переменной есть $\frac{\Delta y}{y}$.

Отношение относительного приращения функции (зависимой переменной) к относительному приращению независимой переменной составляет:

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}.$$

Это соотношение показывает, во сколько раз относительное приращение функция больше относительного приращения независимой переменной. Его можно записать также и в следующем виде :

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\ (1)$$

Если существует производная функция $y=f(x)$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=¿\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}¿\,f`(x)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Передел(2) соотношения между относительным приращением функции y=f(x) и относительным приращением независимой переменной, когда $\Delta x\to 0$, называется эластичностью функции$y=f(x)$ относительно переменной

x. Эластичность функции y=f (x) обозначается символом E_x(y), следовательно,

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%.

ращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Передел

Пример 1. Рассчитать эластичность функции

$$y= 6x - 24.$$

По определению эластичности имеем:

$$E_x(y)= \frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{x}{6x-24}\cdot 6 = \frac{6x}{6x-24} = \frac{x}{x-4}.$$

Если, например, x =20, то эластичность имеем;

$$\frac{20}{20-4}= \frac{20}{16}=\frac{5}{4}.$$

Это означает, что если x возрастет на 1%, то y возрастет на $\frac{5}{4}$%.

Пример 2. Рассчитать эластичность функции

$$y= 2+4x-2x^2.$$

Имеем :

$$E_x(y)= \frac{x}{2+4x-2x^2}(4-4x)= \frac{4x-4x^2}{2+4x-2x^2}.$$

Например, для $x=1$ эластичность составит: $\frac{4\cdot1-4\cdot1^2}{2+4\cdot1-2}=0$

Это означает, что если независимая переменная возрастет на 1%(с 1 до 1,01), то значение зависимой переменной не изменится (в приближении),

ТЕОРЕМА 1. Эластичность произведения двух функции (u и v) равняется сумме показателей эластичности сомножителей.

Доказательство. По определению эластичности имеем:

$$E_x(u\,v) = \frac{x}{uv}\,(u\,v)' = \frac{x}{uv}\,(u\,v' + u'\,v)\ \frac{x}{uv}\,u\,v' + \frac{x}{uv}\,u\,'v =$$

$$= \frac{x}{u}\,U' + \frac{x}{u}\,U' = E_x\,(u) + E_x\,(v)\ .$$

Пример 3. Исчислять эластичность функции

$$y = xe^x$$

Можно написать:

$$u=x;\ v=e^2.$$

Следовательно

$$E_x\,(y) = \frac{x}{x}(x)' + \frac{x}{e^x}\,(e^x ¿ ' = 1+x$$

ТЕОРЕМА 2. Эластичность частного двух функции равняется разности показателей делимого и делителя.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению эластичности имеем :

$$E_n\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{x}{\frac{u}{v}}\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vx}{u}\cdot\frac{vu'-uv'}{v^2} = \frac{x}{u}\,\frac{vu'-uv'}{v} = \frac{x}{u}\left(u' - \frac{uv'}{v}\right) =$$

$$= \frac{x}{u}\,u' - \frac{x}{v}\,v' = E_x(u) - E_x(v).$$

3. Эластичность спроса относительно цены. Функциональная зависимость между спросом на данный товар и его ценой (при условии, что цена других товаров, доходы потребителя и структура потребностей - постоянные величины) позволяет цену поставить и соответствие спросу, надлежащим образом определённому. Однако во многих экономических исследованиях необходимо определить не величину спроса, а изменение спроса, вызываемое определенным изменением цены. Иначе говоря, определяется эластичность спроса относительно цены.

Предположим, что спрос q зависит от цены p:

$$q = f\,(p)$$

Пусть Δp - приращение цены, а Δq - соответствующее приращение спроса. Относительное изменение цены есть $\frac{\Delta p}{p}$, а относительное изменение спроса есть $\frac{\Delta q}{q}$. Частное

$$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p}$$

выражает относительное изменение спроса, если цена товара возрастает на 1%. Эластичностью спроса относительное цены называется передел

$$E_p\,(\mathrm{q}) = E_c = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta p}{p}\right) = \lim_{\Delta p \to 0} \text{¿} \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta p}\right) = \frac{p}{q} \lim_{p \to 0} \text{¿} \frac{\Delta q}{\Delta p}\text{, (2)}$$

и, следовательно

$$E_c = \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\,.$$

Эластичность спроса относительно цены приблизительно определяет, как изменится спрос на данный товар, если его цена возрастёт 1%.

В большинстве случаев функция спроса есть понижающаяся функция, так как с повышением цены на товара спрос на него понижается. Следовательно, в таких случаях:

$$\frac{dq}{dp} \text{¿} 0.$$

Чтобы избежать отрицательных чисел, при изучении эластичности спроса принимается, что

$$E_c = -\text{¿} \frac{p}{q} \cdot \frac{dq}{dp}\,.\,(4)$$

Если $E_c > 1$, т.е, если повышению цены на 1% соответствует снижение спроса более чем на 1%, говорят, что спрос эластичен.

Если $E_c = 1$,т.е, если повышению цены на 1% соответствует понижению спроса на 1%, то говорят, что спрос нейтрален.

Если $0 \text{¿}\ E_c < \text{¿} 1$,т.е, если повышению цены на 1% соответствует понижению спроса менее чем на 1%, говорят, что спрос неэластичен.

П Р И М Е Р 1. Если функция спроса есть

q= 12 −¿p

то эластичность спроса равняется :

$$E_e = -¿\ \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp}\ ¿-\frac{p}{12-p}\cdot(-1) = \frac{p}{12-p}$$

Если, например, p=3 , то

$$E_e = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Это означает, что при цене 3 повышение цены на 1% вызывает снижение спроса на $\frac{1}{3}$ % .

П Р И М Е Р 2. Если функция спроса есть

q = $\frac{c}{p}$(с постоянная),

то эластичность спроса развивается:

$$E_e = -¿\ \frac{p}{q}\cdot\frac{dq}{dp} = \frac{-p}{c/p}\left(-c/p^{-2}\right) = p^2\cdot p^{-2} = 1.$$

Следовательно, если спрос обратно пропорционален цене, то для любой цены эластичность спроса равняется 1.

П р и м е ч а н и е . Следует обратить внимание на то, что эластичность спроса - также функция и, следовательно разным ценам соответствует неодинаковые показатели эластичность спроса.

4.Эластичность спроса относительно дохода. Если факторы, то которых зависит спрос на данный товар, не изменятся, а изменятся только доход потребителей, то спрос q есть функция дохода r.

q = f (r) (1)

Пусть Δr есть прирост дохода, а Δq - соответствующее повышение спроса на товар; частное

$$\frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r}$$

означает в этом случае относительный прирост спроса, соответствующий повышению спроса на единицу.

Эластичность спроса относительно дохода есть мера реакции спроса на изменение дохода потребителей.

$$E_r(q) = \lim_{\Delta r \to 0} ¿¿ \frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta r}{r}) = \frac{r}{q} \cdot \frac{dq}{dr}$$

ПРИМЕР 1. Шведский экономист Герман Волд рассчитал эластичность спроса на некоторые продовольственные товары для периода после первое мировой войны (1933) в Швеции. Он получил результаты, ниже представленные:

Например, для муки эластичность спрос относительно дохода рабочих и служащих составляет - 0,5, а относительно доходов всего население - 0,55. Это означает, что с ростом дохода спроса на муку понижается, причём среди неработающей часть население это происходит в большей степени . Если доход повышается, то потребление муки понижается вследствие замены её другими продовольственными товарами.

Важной проблемой будет, например, изменение спроса с ростом заработной платы. Серьёзным облегчением в таких случаях оказывается знание эластичности спроса относительно дохода.

Пример 2 . Предположим, что государство предполагает повысить цены какого-либо товара на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет 0,3, то следует ожидать, что это вызывает снижение спроса на данный товар на 3%.

В результате такого решения доходы государство повысились бы на 7%.

4. Предложение и эластичность предложение. Под предложением понимается количество некоторого товара предлагаемого на продажу в единицу времени. Как правило, предложение какого-либо товара в данный период есть возрастающая функция цены. При прочих равных условиях предложение при данной цене больше, чем при более низкой цене. Но бывает также случаи, когда предложение повышается со снижением цены. Например, падение цен на зерно нередко вынуждает крестьянина повысить предложение, если он хочет получить определённый доход.

Эластичность предложения можно определить аналогично эластичности спроса.

Пусть s= s (p) есть функция предложения. Пусть Δp - приращение цены, а Δs - соответствующее приращение предложения.

Относительное приращение цены составляет $\frac{\Delta p}{p}$, а относительный прирост предложения $\frac{\Delta s}{s}$.

Предел

$$E_p\,(\mathrm{s}) = E_p = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\frac{\Delta s}{s} : \frac{\Delta p}{p}\right) = \frac{p}{s} \cdot \frac{\lim\limits_{\Delta p \to 0} \Delta s}{\Delta p} = \frac{p}{s} \cdot s' \; (1)$$

называется эластичностью предложения относительно цены.

Следовательно, эластичность предложения относительно цены приблизительно определяет процент прироста предложение на 1% прироста цены.

6. Эластичность полных и средних затрат. Если предприятие производит x единицу какого-либо товара и определена функция полных затрат, то эластичность полных затрат составляет:

$$E_x\,(\mathrm{K}) = E_k = \frac{x}{K}\frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dx} : \frac{K}{x}\,, (1)$$

и, следовательно, эластичность полных затрат есть относительное предельных издержек к средним издержкам.

Эластичность средних издержек $\pi = \frac{K}{x}$ составляет ;

(2)

$$E_x\,(\pi) = E_\pi = \frac{x}{\pi}\frac{d\pi}{dx} = \frac{x}{\frac{K}{x}} \cdot \frac{x\frac{dK}{dx} - K}{x^2} = \frac{x^2}{K} \cdot \frac{x\frac{dK}{dx} - K}{x^2} = \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} - 1 = ¿\, E_k - 1$$

и, следовательно, эластичность средних издержек на единицу меньше эластичности полных затрат.

Если E_π=1, то эластичность средних затрат равняется нулю. Тогда E_π =0, а это означает, что средние затраты постоянны. Отсюда следует, что

$$x\frac{dK}{dx} - K = 0, \text{ или } \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x}. \quad (3)$$

Следовательно, если Эластичность полных затрат равняется 1, полные предельные издержки равняются средним полным издержкам.

Список использованной литературы

1. Ашманов С. А. "Линейное программирование" (1981)
2. Палий И. А. "Линейное программирование" (2008)
3. В. И. Бахтин, И. А. Иванищко "Линейное программирование"
4. Х. Э. Крыньский "Математика для экономистов" (1970)
5. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн "Задачи и методы линейного программирования"