

YUQORI DARAJALI ALGEBRAIK TENGLAMALARNI YECHISH USULI HAQIDA

Soatov Ulugbek Abdukadirovich
Jizzax politexnika instituti dotsenti, f-m.f.n.

Annotatsiya: Ushbu maqolada yuqori darajali algebraik tenglamalarni yechishning Bezu teoremasi va uning tatbiqlariga asoslangan usuli - ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish usuli hamda uning tatbiqiga doir masalalar qaralgan. Qaralayotgan tenglama butun koeffitsientli bo'lgan holda uning ratsional, xususan butun ildizlari mavjud bo'lsa, ularni topish mumkinligi ko'rsatilgan. Bu holda qaralayotgan algebraik tenglamaning kasr ratsional ildizlarini topish usulini ifodalovchi teorema va uning natijalari va tatbiqlari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: n-darajali algebraik tenglama, bosh koeffitsient, ozod had, Bezu teoremasi, ko'phad, ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish, usul, butun son, kasr ratsional ildiz, qoldiq, qoldiq had, to'liqsiz bo'linma, Gornier sxemasi.

ON THE METHOD OF SOLVING HIGHER-DEGREE ALGEBRAIC EQUATIONS

Soatov Ulugbek Abdukadirovich
Associate Professor of Jizzakh Polytechnic Institute, Ph.D.

Annotation: This article examines the method of solving high-degree algebraic equations based on Bézout's theorem and its applications - the method of factoring polynomials and its applications. It has been shown that in the case of an integer-coefficient equation under consideration, it is possible to find its rational, in particular, integer, roots if they exist. In this case, the theorem describing the method of finding fractional rational roots of the considered algebraic equation and its results and applications were studied.

Key words: algebraic equation of degree n , leading coefficient, constant term, Bézout's theorem, polynomial, factorization of polynomials, method, integer, fractional rational root, remainder, remainder term, incomplete quotient, Horner scheme.

Respublikamizda so'nggi yillarda ixtisoslashtirilgan davlat maktablari soni ko'payganligi hamda ularda matematika fanini chuqurlashtirib o'qitish dasturlari bo'yicha ishlar keng amalga oshirilayotganligi va natijada ta'limini rivojlantirishga alohida e'tibor qaratilayotganligi va bu jarayon malakali mutaxassislar tayyorlashda, fan-texnika va ishlab chiqarish taraqqiyotida muhim ahamiyatga ega. Bunda Prezidentimiz Sh.M.Mirziyoyevning 2020 yil 7 may dagi "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to'g'risida" nomli PQ-4708 qarori [1] - asosiy hujjatlardan biri ekanligini ta'kidlash joiz. Unda "Ta'limning barcha bosqichlarida matematika fanini o'qitish tizimini yanada takomillashtirish va matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish" bo'yicha belgilab berilgan vazifalar hayotga tatbiq etilayotganligini ko'ramiz.

Matematikani chuqurlashtirib o'rgatish sinflarini takomillashtirish maktab ta'lim bosqichidanoq keng qo'llanilishi, keyinchalik oliy ta'lim muassasalarida

o'gishda hamda matematika to'garaklarida davom etadi va ular ko'plab yosh matematiklar, muhandislar va texniklarning yetishib chiqishiga yordam beradi. Bunday iqtidorli ta'lim oluvchilar murakkab masalalarni va ularni yechish usullarini o'rganib borishlari ularda matematik qobiliyatlar shakllanishiga asos bo'ladi [2-4].

Ma'lumki, algebraik tenglamalarni yechishga oid masalalar bilan turli davrlarda ko'pchilik matematiklar shug'ullanishgan. Ulardan biri, buyuk olim Abu Abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning matematika taraqqiyotida muhim o'rin tutgan algebraga oid "Al-kitob al-muxtasar fi al-jabr va al-muqobala" nomli asari mavjud bo'lib, u bu asari bilan algebraga asos soladi va algebrani alohida fan darajasiga ko'taradi.

Xorazmiy tadqiqotlari, keyinchalik uzoq yillar va asrlar davomida ko'plab olimlar tomonidan davom ettirilgan. Jumladan, yevropalik olimlar Viyet, Kardano va Ferrarilar mos ravishda ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi darajali tenglamalarning ildizlarini topish formulalarini yaratishgan. XIX asrda yosh matematik olim E.Galua esa beshinchi darajali algebraik tenglamaning ildizlari radikallarda ifodalanadigan umumiy formula (usul) mavjud emasligini isbotlagan.

Ushbu maqolada yuqori darajali algebraik tenglamalarni yechish usullaridan biri bo'lgan ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish usuli va uning tatbiqiga doir masalalarni o'rganish maqsad qilindi. Yuqori darajali tenglamalarni yechishda tenglama chap tomonidagi ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratish usuli qugiyidagi Bezu teoremasi va uning tatbiqiga asoslanadi (Bezu - fransuz matematigi, XVIII-asr).

Teorema (Bezu teoremasi). Agar α soni n -darajali $P(x)$ ko'phadning ildizi bo'lsa, u holda bu ko'phadni $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ ko'rinishida tasvirlash mumkin, bunda $Q(x) - P(x)$ ni $(x-\alpha)$ ga bo'lishdagi bo'linma $(n-1)$ - darajali ko'phad.

Demak, agar n -darajali $P(x)=0$ tenglamaning kamida bitta ildizi mavjud bo'lsa, Bezu teoremasi yordamida masalani $(n-1)$ -darajali tenglamani yechishga

keltirish mumkin, ya'ni tenglama darajasini pasaytirish mumkin. Bu yerda **tabiiy savol** tug'iladi: tenglamaning hech bo'lmaganda bitta ildizini qanday topish kerak?

Tenglama butun koeffitsientli bo'lgan holda uning ratsional, xususan butun ildizlarini (agar ular mavjud bo'lsa) izlashimiz mumkin. Bu holda qaralayotgan algebraik tenglamaning ratsional ildizlarini topish usuli quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

p

Teorema. q qisqarmas kasr butun koeffitsientli

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

ko'phad (tenglama) ildizi bo'lsin. U holda p soni a_n ozod had bo'luvchisi, q soni esa a_0 bosh koeffitsient bo'luvchisi bo'ladi.

p

Teoremani isbotlash uchun q ni (1) tenglamaga qo'yib, maxrajlardan qutqirish kerak va hosil bo'lgan tenglikni ikki xil usulda yozish orqali a_n ning p ga va a_0 ning q ga bo'linishi ko'rsatiladi. Bu teoremadan quyidagi ikkita natija kelib chiqadi.

1-natija. Butun koeffitsientli tenglamaning har qanday ildizi uning ozod hadi bo'luvchisi bo'ladi.

2-natija. Agar butun koeffitsientli tenglamaning bosh koeffitsienti 1 ga teng va bu holda tenglamaning ratsional ildizlari mavjud bo'lsa, ular hammasi butun sonlardan iborat bo'ladi.

1-misol. $2x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$ tenglamani yeching.

p

Yechish. Tenglamaning ratsional ildizlarini topamiz. Faraz qilaylik q qisqarmas kasr tenglama ildizi bo'lsin. U holda teorema natijalariga ko'ra p sonini ozod had bo'luvchilari orasidan izlash kerak, ya'ni ± 1 ichidan, q ni esa bosh koeffitsientning musbat bo'luvchilari 1, 2 lar ichidan izlaymiz. Shunday qilib, tenglamaning ratsional ildizlarini $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$ lar ichidan izlash kerak. Tekshirish

natijasida faqatgina $\frac{1}{2}$ soni tenglama ildizi bo'lishini ko'ramiz va tenglamaning chap tomonini ko'paytuvchlarga ajratamiz. Buning uchun $2x-1$ ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Tenglamani

$$2x^3 - x^2 - 6x^2 + 3x + 2x - 1 = 0 \text{ ko'rinishida yozamiz va natijada}$$

$$x^2(2x-1) - 3x(2x-1) + (2x-1) = 0 \text{ yoki } (2x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Ikkinchi ko'paytuvchini no'lga tenglab, $x^2 - 3x + 1 = 0$

kvadrat tenglama ildizlari $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ni topamiz. Demak, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ lar berilgan tenglama ildizlari bo'ladi.

Yuqorida ta'kidlanganidek, $P(x) = 0$ tenglama ildizi α ma'lum bo'lsa, tenglama darajasini pasaytirish $P(x)$ ko'phadni $x - \alpha$ ga bo'lishdagi bo'linmani topishga keltiriladi. $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ko'phadni $x - \alpha$ ga bo'lishni Gerner sxemasini deb ataluvchi sxema bo'yicha bajarish qulay bo'ladi. $P(x)$ ko'phadni $x - \alpha$ ga bo'lishdagi to'liqmas bo'linmani $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}$ ko'rinishida, qol-diqni esa b_n orqali belgilaymiz. $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + b_n$ bo'lganligi uchun quyidagi ayniyat o'rinli:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = (b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n)(x - \alpha) + b_n.$$

Bu tenglik o'ng tomonidagi qavslarni ochib, tenglikning chap va o'ngidagi x noma'lumning koeffitsientlarini tenglashtiramiz. Natijada $b_0 = a_0$ va $b_k = a_k + \alpha b_{k-1}$, $(1 \leq k \leq n)$ munosabat o'rinli bo'ladi.

$Q(x)$ ko'phad koeffitsientlari va b_n - qoldiqni hisoblash quyidagi jadval ko'rinishida yoziladi:

a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha b_1$	$\dots$	$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	$b_n = a_n + \alpha b_{n-1}$

va bu jadval Gorner sxemasi deb ataladi. Birinchi satrda $P(x)$ ko'phad koeffitsentlari, ikkinchi satrda $Q(x)$ - to'liqmas bo'linma (ko'phad) koeffitsentlari va qoldiq had hosil qilinadi.

Bezu teoremasiga asosan $b_n = P(\alpha)$ bo'lganligi uchun Gorner sxemasi $P(x)$ ko'phadning $x = \alpha$ dagi qiymatini topish imkonini beradi. Ko'p hollarda Gorner sxemasi $x = \alpha$ ni $P(x)$ ko'phadga to'g'ridan to'g'ri qo'yishdan qulayroq bo'ladi.

2-misol. Agar $P(x) = 4x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ bo'lsa, $P(3)$ ni hisoblang.

Yechish. Berilgan ko'phadga mos Gorner sxemasini tuzamiz:

	4	-7	5	0	-2	1
3	4	5	20	60	178	535

Natijada, $P(3) = 535$ ekanligini ko'ramiz.

3-masala. $P(x) = 4x^5 - 7x^4 + 5x^3 - 2x + 1$ butun koeffitsentli ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating: .

Yechish: Butun ildizlarni ozod had bo'luvchilari ± 1 lardan izlaymiz. Bu yerda -1 mos keladi. $P(x)$ ko'phadni $x+1$ ga bo'lamiz, ya'ni Gorner sxemasi ni

	2	-7	-3	5	-1
-1	2	-9	-6	-1	0

tuzamiz. Uning ikkinchi satrida $Q(x)$ -to'liqmas bo'linma koeffitsentlari va qoldiq hadni topamiz. U holda $P(x) = (x+1)(2x^3 - 9x^2 + 6x - 1)$ bo'lib, $b_1 = -7 + (-1)2 = -9$.

Ikkinchi qavsdagi 3-darajali ko'phad butun ildizlarini uning ozod hadi bo'luvchilari ± 1 lardan izlaymiz. Tekshirish natijalari ko'rsatadiki, butun ildizlar yo'q. Bosh koeffitsent 1 ga teng bo'lmaganligi uchun bu ko'phad kasr ratsional

ildizlar $\frac{1}{2}$ va $-\frac{1}{2}$ ga ega bo'lishi mumkin. Bulardan $\frac{1}{2}$ mos keladi. Natijada, $P(x) = (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 4x + 1) = (x+1)(2x-1)(x^2 - 4x + 1)$ ga ega bo'lamiz. Bu yerda

$x^2 - 4x + 1$ kvadrat uchhad butun koeffitsentli ko'paytuvchilarga ajralmaydi:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \text{ va } x_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Va, } P(x) = (x+1)(2x-1)(x^2 - 4x + 1).$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Sh.M.Mirziyoyev "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora tadbirlari to'g'risida" nomli PQ-4708 qarori", 2020-y. 7- may
2. В.С.Крамор. «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа», //Учебное пособие//, Москва, «Просвещение», 1990.
3. И.Ф.Шарыгин, В.И.Голубев. "Факультативный курс по математике". Решение задач. Москва, "Просвещение", 1991 г.
4. Soatov U.A., Axadova K.S. "Tenglama va tengsizliklarni yechishning ba'zi nostandart usullari haqida", "Tafakkur ziyosi" jurnali, 2021 yil №4 soni, 40-45 betlar.