

ANIQ INTEGRALLARNI HISOBLASH

Bektoshev Quvondar Hakimovich¹, Xurramov Shuxrat Isoqovich²

¹Toshkent amaliy fanlar universiteti

“Raqamli va fundamental fanlar kafedrası” katta o‘qituvchisi

²Toshkent amaliy fanlar universiteti

“Raqamli va fundamental fanlar kafedrası” katta o‘qituvchisi

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2869-4188>

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3875-5723>

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Бектошев Кувондар Хакимович¹, Хуррамов Шухрат Исаакович²

¹Ташкентский университет прикладных наук

Старший преподаватель кафедры «Цифровые и фундаментальные науки»

²Ташкентский университет прикладных наук

Старший преподаватель кафедры «Цифровые и фундаментальные науки»

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2869-4188>

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3875-5723>

CALCULATION OF DEFINITE INTEGRALS

Bektoshev Kuvondar Hakimovich¹, Khurramov Shukhrat Isakovich²

¹Tashkent University of Applied Sciences

Senior Lecturer, Department of “Digital and fundamental sciences”

²Tashkent University of Applied Sciences

Senior Lecturer, Department of “Digital and fundamental sciences”

ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-2869-4188>

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-3875-5723>

ANNOTATSIYA

Maqola olimpiada tanlovlaridagi aniq integrallarni hisoblashning umumiy va xususiy hollariga qaratilgan. Maqolada toq funksiyalar orqali hisoblash, integralni integrallar yig'indisiga ajratish bilan, integralni yangi o'zgaruvchi kiritish usullari bilan hisoblash ko'rsatilgan.

АННОТАЦИЯ

Статья посвящена общим и частным случаям вычисления определённых интегралов в олимпиадных конкурсах. В статье показано вычисление через

нечётные функции, разложение интеграла на сумму интегралов, а также вычисление интеграла с использованием методов введения новой переменной.

ANNOTATION

The article is devoted to the general and specific cases of calculating definite integrals in olympiad competitions. The article demonstrates calculation through odd functions, by breaking the integral into a sum of integrals, and by using methods involving the introduction of a new variable.

Tayanch so'zlar: Aniq integral, Nyuton-Leybnis formulasi, toq funksiya, differensial, topmoq, chegaralangan, ko'phad, ayniyat, umumiy ko'paytuvchi, argument, yechim, bajarmoq, almashtirmoq.

Ключевые слова: Определённый интеграл, формула Ньютона-Лейбница, нечётная функция, дифференциал, находить, ограниченный, произведение, тождественность, общий множитель, аргумент, решение, выполнять, заменять.

Keywords: Definite integral, Newton-Leibniz formula, odd function, differential, to find, bounded, multiple, reciprocal, common factor, argument, solution, to perform, to substitute.

KIRISH

Matematika, fizika, mexanika va boshqa fanlarda tadqiqotlar olib borishning eng yaxshi vositalaridan biri aniq integraldir. Egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzalarni, yoylarning uzunliklarini, hajmlarni, ishni, tezlikni, yo'lni, inersiya momentlarini hisoblash aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

Matematika fan olimpiadalarida berilgan ba'zi aniq integrallarni funksiya xossaligidan foydalangan holda hisoblash mumkin.

Aniq integral ostidagi funksiya, toq funksiya bo'lsa, u holda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0, \quad f(-x) = -f(x), \quad (1)$$

tenglikdan foydalanamiz.

1-misol. $\int_{-1}^1 x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})dx$ aniq integralni hisoblang.

Yechish. Bu integral ostidagi funksiya toq funksiya ekanligini ko'rsatib hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = x^2 \ln\left(\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = \\ &= x^2 \ln\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = x^2 \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) = -x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x) \end{aligned}$$

Integral ostidagi funksiyaning toqligidan, $\int_{-1}^1 x^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx = 0$, ga teng.

2-misol. $\int_0^{2008} x \cdot (x-4) \cdot (x-8) \cdot \dots \cdot (x-2008) \cdot dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Aniq integralni hisoblash uchun, quyidagicha belgilash kiritib, yuqoridagi (1) dan foydalanib, toq funksiya keltiramiz.

$$\begin{aligned} \int_0^{2008} x \cdot (x-4) \cdot (x-8) \cdot \dots \cdot (x-2008) \cdot dy &= \left| \begin{array}{l} y = x - 1004 \\ dx = dy \\ -1004 \leq y \leq 1004 \end{array} \right| = \\ &= \int_{-1004}^{1004} (y+1004) \cdot (y+1000) \cdot \dots \cdot (y+4) \cdot y \cdot (y-4) \cdot \dots \cdot (y-1000) \cdot (y-1004) \cdot dy = \\ &= \int_{-1004}^{1004} (y^2 - 1004^2) \cdot (y^2 - 1000^2) \cdot \dots \cdot (y^2 - 4^2) \cdot y \cdot dy = 0 \end{aligned}$$

Integralning qiymati nolga teng ekan.

3-misol. $\int_{-a}^a \frac{1}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx$, integralni hisoblang, bu yerda $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

ga teng.

Yechish. Aniq integralni hisoblashda berilgan shartlardan foydalanib hisoblaymiz.

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a \frac{1}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx &= \int_{-a}^0 \frac{1}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx + \int_0^a \frac{1}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx = \\
&= \int_0^a \frac{1}{1 - \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx + \int_0^a \frac{1}{1 + \varphi(x) + \sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx = \\
&= \int_0^a \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varphi^2(x)} - \varphi(x)} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \varphi^2(x)} + \varphi(x)} \right) dx = \\
&= \int_0^a \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varphi^2(x)} + \varphi(x) + 1 + \sqrt{1 + \varphi^2(x)} - \varphi(x)}{(1 + \sqrt{1 + \varphi^2(x)})^2 - \varphi^2(x)} \right) dx = \int_0^a \frac{2 + 2\sqrt{1 + \varphi^2(x)}}{2 + 2\sqrt{1 + \varphi^2(x)}} dx = \int_0^a 1 dx = a.
\end{aligned}$$

4-misol. $\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu yerda, birinchi qo'shiluvchida $x = -x$ deb olib ikkinchi integral o'zini yozib, quyidagicha hisoblaymiz.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}} dx + \int_0^1 \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}} dx = \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1 - x^3 + \sqrt{1 + x^6}} dx + \int_0^1 \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}} dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1 - x^3 + \sqrt{1 + x^6}} + \frac{1}{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6}} \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1 + x^3 + \sqrt{1 + x^6} + 1 - x^3 + \sqrt{1 + x^6}}{(1 + \sqrt{1 + x^6})^2 - x^6} \right) dx = \int_0^1 \frac{2 + 2\sqrt{1 + x^6}}{2 + 2\sqrt{1 + x^6}} dx = \int_0^1 1 dx = 1.
\end{aligned}$$

Ma'lumki, $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+a^{-1}} = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+a} = 1$ tenglikdan ham foydalanib integralni oson hisoblash mumkin.

5-misol. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x + 1)(1 + x^2)} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+a^{-1}} = 1$ ayniyatdan, foydalanib, integralni qiymatini topamiz.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{(e^x + 1)(1 + x^2)} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{(e^{-x} + 1)(1 + x^2)} dx + \int_0^1 \frac{1}{(e^x + 1)(1 + x^2)} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{(e^{-x} + 1)(1 + x^2)} + \frac{1}{(e^x + 1)(1 + x^2)} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^{-x} + 1} + \frac{1}{e^x + 1} \right) \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1} + \frac{1}{e^x + 1} \right) \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

6-misol. $\int_{-2019}^{2019} \frac{1}{1 + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Berilgan integralni quyidagicha yozib hisoblash mumkin.

$$\begin{aligned} \int_{-2024}^{2024} \frac{1}{1 + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} dx &= \int_{-2024}^0 \frac{1}{1 + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} dx + \int_0^{2024} \frac{1}{1 + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} dx = \int_0^{2024} \frac{1}{1 + 2^{-\pi \operatorname{tg} x}} dx + \int_0^{2024} \frac{1}{1 + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} dx = \\ &= \int_0^{2024} \left(\frac{1}{1 + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} + \frac{1}{1 + 2^{-\pi \operatorname{tg} x}} \right) dx = \int_0^{2024} \left(\frac{2 + 2^{-\pi \operatorname{tg} x} + 2^{\pi \operatorname{tg} x}}{2 + 2^{-\pi \operatorname{tg} x} + 2^{\pi \operatorname{tg} x}} \right) dx = \int_0^{2024} 1 dx = 2024 \end{aligned}$$

7-misol. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralni hisoblashda $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)) dx$ deb olib,

$x = \frac{\pi}{2} - y$ belgilash kiritib olamiz, bu yerda $\sin(\frac{\pi}{2} - y) = \cos y$, $\cos(\frac{\pi}{2} - y) = \sin y$ ga teng.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\cos(\frac{\pi}{2} - y)) + \sin^2(\sin(\frac{\pi}{2} - y))) dy = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\sin y) + \sin^2(\cos y)) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(\sin y) + 1 - \cos^2(\cos y)) dy = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\sin y) + \cos^2(\cos y)) dy
\end{aligned}$$

Berilgan integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)) dx$ va $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\sin y) + \cos^2(\cos y)) dy$

larning qiymati o'zgaruvchiga bog'liq emas, demak ularning qiymatlari bir xil ya'ni

$$I \text{ ga teng. Oxirgi tenglikdan } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dy - I, \Rightarrow 2I = \pi, \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}.$$

Berilgan integralni qiymati $\frac{\pi}{2}$ ga teng.

XULOSA

Maqolada olimpiada tanlovlaridagi aniq integrallarni hisoblashning umumiy va xususiy hollari keltirilgan. Toq funksiyalar orqali hisoblash, integralni integrallar yig'indisiga ajratish yoki yangi o'zgaruvchi kiritish usullari bilan hisoblash yo'llari ko'rsatilgan. Yuqoridagi usullardan foydalanib aniq integrallarni hisoblash, o'ylaymizki, matematika ixlosmandlariga foydali bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Григорьева.И.С. “Казанские студенческие олимпиады по математике”. Казань-2021 г.
2. И.Ю.Попов. “Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики”. Санкт-Петербург-2018 г.
3. Р.М.Федоров. “Московский математические олимпиады”. Москва

2021 г.