KO‘PHADNING HAQIQIY ILDIZLARI.
KO‘PHADLARNING KELTIRILMASLIK ALOMATLARI

M.S.Razoqova

O‘zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti 3-kurs talabasi

M.B.Otamurodov

O‘zbekiston-Finlandiya pedagogika instituti 3-kurs talabasi

Sh.A.Sodiqov

Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti akademik litseyi Matematika fani o‘qituvchisi

Annotatsiya: Ko‘phadlar nazariyasida “tub son‘‘ vazifasini o‘taydigan ko‘phadlar keltirilmaydigan ko‘phadlar deyiladi. Quyida ko‘phadlarning keltirilmaslik alomatlari bilan tanishamiz.

Kalit so‘zlar: haqiqiy ildizlari, ko‘phad, koeffitsent, keltirilmaydigan ko‘phad, keltirilmaslik alomatlari, ildiz, segment.

THE TRUE ROOTS OF THE POLY.
INCREDIBLE SYMPTOMS OF MULTIPLES

M.S. Razokova

3rd year student of Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

M. B. Otamurodov

3rd year student of Uzbekistan-Finland Pedagogical Institute

Sh.A. Sodikov

Teacher of mathematics at the Academic Lyceum of the World Economy and Diplomacy University

Abstract: In the theory of polynomials, polynomials that act as "prime numbers" are called irreducible polynomials. Below we will get acquainted with the symptoms of polynomials.

Key words: real roots, polynomial, coefficient, irreducible polynomial, signs of irreducibility, root, segment.

ИСТИННЫЕ КОРНИ ПОЛИ.
НЕВЕРОЯТНЫЕ СИМПТОМЫ МНОЖЕСТВЕННОСТИ

Разокова

Студентка 3 курса Узбекско-Финляндского педагогического института

М. Б. Отамуродов.

Студентка 3 курса Узбекско-Финляндского педагогического института

Ш.А. Содиков

Учитель математики Академического лицея Университета мировой экономики и дипломатии

Аннотация: В теории полиномов многочлены, являющиеся «простыми числами», называются неприводимыми многочленами. Ниже мы познакомимся с симптомами многочленов.

Ключевые слова: вещественные корни, многочлен, коэффициент, неприводимый многочлен, признаки неприводимости, корень, отрезок.\

Ko‘phadning haqiqiy ildizlari

Asosan quyidagi ikkita teoremadan foydalanamiz:

Teorema 1. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a,b]$;
2) Segmentning chetki nuqtalari a va b larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya’ni:

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki} f(a) > 0 > f(b)$$

bo‘lsin.

U holda shunday $c \in (a,b)$ nuqta topiladiki, $f(c) = 0$ bo‘ladi.

Teorema 2. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C[a,b]$;
2) $\forall x \in (a,b)$ da $f'(x)$ mavjud va chekli;

3) $f(a)=f(b)$ bo‘lsin;

U holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki, $f'(c)=0$ bo‘ladi.

Biz qaraydigan masalalar faqat ko‘phadlarga doir bo‘lganligi uchun keyingi qatorlarda *Teorema 1* ni $1-$sharti, *Teorema 2* ni esa $1-$ va $2-$shartlarini tekshirmaymiz.

Lemma 1. Ixtiyoriy toq darajali ko‘phad kamida bitta haqiqiy ildizga ega.

Isbot. Bizga toq darajali $p(x)$ ko‘phad berilgan bo‘lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda uning bosh koeffitsientini musbat deb faraz qilishimiz mumkin. U holda quyidagi munosabatlarga egamiz:

$$\lim_{x\to-\infty} p(x)=-\infty \text{ va } \lim_{x\to+\infty} p(x)=+\infty.$$

Bundan uzluksiz funksiyalarda limit xossalariga ko‘ra shunday $a<0$ va $b>0$ sonlari topiladiki, ular uchun mos ravishda $p(a)<0$ va $p(b)>0$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Demak $f(x)=p(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda *Teorema 1* ning barcha shartlari qanoatlantirar ekan, bundan biror $c\in(a,b)$ soni uchun $p(c)=f(c)=0$ tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Lemma 2. Agar $p(x)$ ko‘phad n ta haqiqiy ildizga ega bo‘lsa, u holda $p'(x)$ ko‘phad kamida $n-1$ ta haqiqiy ildizga ega bo‘ladi.

Isbot. Ko‘phadning haqiqiy ildizlari $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n$ bo‘lsin. Umumiylikka ziyon yetkazmagan holda $x_1\le x_2\le x_3\le\ldots\le x_n$ deb faraz qilishimiz mumkin. Quyidagi ikkita holat bo‘lishi mumkin:

1) Biror i (lar) uchun $x_i<x_{i+1}$. U holda $p(x_i)=p(x_{i+1})=0$ ekanligini inobatga olsak, *Teorema* 2 ko‘ra shunday $y_i\in(x_i,x_{i+1})$ topiladiki, bu uchun $p'(y_i)=0$ munosabat o‘rinli bo‘ladi;
2) Biror i (lar) uchun $x_i=x_{i+1}$. U holda Bezu teoremasiga ko‘ra ushbu $p(x)=(x-x_i)^2\cdot q(x)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $q(x)$ ko‘phad mavjud bo‘ladi. Bundan:

$$p'(x)=(x-x_i)(2\cdot q(x)+(x-x_i)q'(x))$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Demak $y_i=x_i(=x_{i+1})$ soni uchun $p'(y_i)=0$ tenglik o‘rinli ekan.

Har ikkala holatda ham $p'(y_i)=0$ tenglikni qanoatlantiruvchi $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ soni topiladi, bu yerda $i=\overline{1,n-1}$ (jami $n-1$ ta).

Misol 1. $a_1, a_2, \dots, a_n$ noldan farqli turli haqiqiy sonlar uchun quyidagi

$$\frac{a_1}{a_1+x}+\frac{a_2}{a_2+x}+\dots+\frac{a_n}{a_n+x}=n$$

tenglama n ta haqiqiy ildizga ega ekanligini isbotlang.

Yechim. Tenglamani boshqacha ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{a_1}{a_1+x}-1+\frac{a_2}{a_2+x}-1+\dots+\frac{a_n}{a_n+x}-1=0.$$

yoki

$$x\left(\frac{1}{a_1+x}+\frac{1}{a_2+x}+\dots+\frac{1}{a_n+x}\right)=0.$$

Endi

$$p(x)=(x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_n)$$

deb belgilash kiritsak, tenglamani quyidagi:

$$x\cdot\frac{p'(x)}{p(x)}=0$$

ko‘rinishga kelishini ko‘rish qiyin emas. Bu yerda $p(x)$ aniqlanishiga ko‘ra n ta turli haqiqiy ildizga ega ($(-a_i)$ lar), demak *Lemma* 2 ga ko‘ra, $p'(x)$ ko‘phad $n-1$ ta turli haqiqiy ildizga ega bo‘ladi, bundan $p'(x)$ ni ildizlari $-a_i$ lar turli bo‘lganligi uchun ular bilan ustma-ust tushmaydi va turli bo‘ladi (*Lemma 2* ni isbotini $1-$ holi). Demak suratidagi $p'(x)$ ko‘phad hisobiga tenglamada $n-1$ ta turli haqiqiy ildiz bor (yechimlar ichida 0 yo‘qligini ko‘rsatish oson), va $n-$ ildiz esa ko‘paytmadagi x hisobiga 0 bo‘ladi.

Masala 2. $a_1, a_2, \dots, a_n$ noldan farqli turli haqiqiy sonlar uchun quyidagi:

$$p(x)=x^n+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

tenglama n ta haqiqiy ildizga ega bo‘lsa, $a_2 \le 0$ ekanligini isbotlang.

Yechim. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $a_2 > 0$ bo‘lsin. Endi *Lemma 2* ni $n-2$ marta quyidagicha qo‘llaymiz:

$p(x)$ dan n ta haqiqiy ildiz $\Rightarrow p'(x)$ da (kamida) $n-1$ ta haqiqiy ildiz $\Rightarrow p''(x)$ da (kamida) $n-2$ ta haqiqiy ildiz $\Rightarrow \ldots \Rightarrow p^{(n-2)}(x)$ da esa (kamida) 2 ta haqiqiy ildiz. Boshqa tomonidan farazimizga ko‘ra $(a_2>0)$:

$$p^{(n-2)}(x)=\frac{n!}{2}\left(x^2+\frac{a_2}{n(n-1)}\right)>\frac{n!}{2}\cdot\frac{a_2}{n(n-1)}>0.$$

Tengsizlik bizda bor (ya’ni $p^{(n-2)}(x)$ ko‘phad haqiqiy ildizga ega emas). Bu esa ziddiyat, demak $a_2\le 0$ bo‘lishi kerak ekan.

Ko‘phadning keltirilmaslik alomati

Bizga koeffitsentlari butun sonlardan iborat ko‘phad berilgan bo‘lsin. Bunday ko‘phadlarning hammasi ratsional sonlar maydonidagi ko‘phadlar ekanligi ma‘lum. Shunday qilib,

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

ko‘phadning koeffitsentlari butun sonlar deb faraz qilamiz. Barcha $a_0, a_1, a_3, \ldots, a_n$ koeffitsentlarining eng kata umumiy bo‘luvchisini d bilan belgilaymiz. Agar d ni qavsdan tashqariga chiqarsak,

$$f(x)=d\phi(x)$$

hosil bo‘ladi. Bunda $\phi(x)$ ko‘phadning koeffitsentlari 1 dan iborat eng katta umumiy bo‘luvchiga ega. Agar P maydonda darajasi nolga teng bo‘lmagan $f(x)$ ko‘phadni shu P maydonda va darajalari $f(x)$ ning darajasidan kichik ikkita $g(x)$ va $h(x)$ ko‘phad ko‘paytmasi sifatida ifodalash (ko‘paytmaga keltirish) mumkin bo‘lsa, $f(x)$ ni P maydonda *keltiriladigan ko‘phad* deyiladi. Bunday ko‘paytmasi sifatida ifodalash (ko‘paytmaga keltirish) mumkin bo‘lmasa, u P maydonda *keltirilmaydigan ko‘phad* deyiladi. Har qanday sonlar maydonida birinchi darajali istalgan ko‘phad shu maydonda keltirilmaydigan ko‘phaddir.

Teorema. (Eyzenshteynning keltirilmaslik alomati). Agar butun koeffitsentli

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

ko‘phadning a_n bosh koeffitsentidan boshqa hamma koeffitsenti p tub songa bo‘linsa va ozod had p ga bo‘lingan holda p^2 ga bo‘linmasa, $f(x)-$ratsional sonlar maydonida *keltirilmaydigan ko‘phad* bo‘ladi.

Misol 3. Berilgan ko‘phadning Q maydonda keltiriladimi?

$$f(x)=x^4+3x^3-15x+9.$$

Yechim. $f(x)$ ko‘phadning bosh koeffitsentidan boshqa hamma koeffitsenti 3 bo‘linadi, ozod hadi esa 3^2 ga bo‘linadi. Demak, Eyzenshteyn alomatiga ko‘ra berilgan $f(x)$ ko‘phad keltiriladigan ko‘phad ekan.

Teorema. (Perronning keltirilmaslik alomati). Agar butun koeffitsentli

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

$a_n\neq 0$ ko‘phad quyidagi ikkita shart:

a) $|a_{n-1}|>1+|a_{n-2}|+...+|a_0|$;

b) $|a_{n-1}|=1+|a_{n-2}|+...+|a_0|$, $f(\pm 1)\neq 0$

dan birini qanoatlantirsa $f(x)$ butun sonlar maydonida keltirilmaydigan ko‘phad bo‘ladi.

Misol 4. Berilgan ko‘phadning butun sonlar maydonda keltiriladimi?

$$f(x)=2x^5-4x^4+9x^3+5x^2+7x-3.$$

Yechim. Perronning keltirilmaslik alomatining birinchi shartiga ko‘ra tekshiramiz. Berilgan $f(x)$ ko‘phad quyidagi $|a_{n-1}|>1+|a_{n-2}|+...+|a_0|$ bajarilmasligi sababli butun sonlar maydonida keltiriladigan ko‘phad ekanligi kelib chiqadi.

Teorema. (Konning keltirilmaslik alomati). Agar p tub soni 10 lik asosga ko‘ra;

$$p=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_110^1+a_0$$

kabi ifodalansa, u holda:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

bunda $0 \le a_i \le 9$ butun koeffitsentli ko‘phad butun sonlar maydonida keltirilmaydigan ko‘phad bo‘ladi. Teoremani boshqa asoslarga quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Faraz qilaylik $b \ge 2$ natural son va

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0,$$

$0 \le a_i \le b-1$ qandaydir ko‘phad bo‘lsin. Agar $p(b)$ tub son bo‘lsa, u holda $p(x)$ ko‘phad $Z[x]$ da keltirilmaydigan ko‘phad bo‘ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Cox, David A. (2011), "Why Eisenstein proved the Eisenstein criterion and why Schönemann discovered it first", American Mathematical Monthly, 118 (1): CiteSeerX 10.1.1.398.3440.
2. Perron, Oskar (1907). "Neue kriterien für die irreduzibilität algebraischer gleichungen" . Matematik jurnali . Valter de Gruyter. 132 : 288–307.
3. www.wikipedia.org.
4. Po'latov B., Xurramov Y., Yusupova M. Matematika fanini o‘rgatishda tarixiy materiallardan foydalanish //Журнал математики и информатики. – 2022. – Т. 2. – №.
5. Y.Xurramov Mathematical competence degree of technical engineers and future engineering students. Global C.