UDK: 517.984

GILBERT FAZOSIDA CHIZIQLI CHEGARALANGAN OPERATORLAR.

O‘ktamova Sabina G‘olib qizi
Qarshi davlat universiteti tayanch doktoranti
Usmonov Navruz Muzaffarovich
Guliston davlat universiteti tayanch doktoranti

Annotatsiya: Ushbu maqolada Gilbert fazosida chiziqli chegaralangan operatorlar nazariyasi atroflicha yoritilgan. Jumladan, operator tushunchasi, operatorning aniqlanish va qiymatlar sohasi, bir jinsli operator, additiv operator, chiziqli operator hamda chegaralangan operator kabi asosiy tushunchalarga aniqlik kiritilgan. Har bir tushunchaga oid ta’rif va ularning xossalarini ifodalovchi teoremalar keltirilgan. Shuningdek, operatorning normasi va uning asosiy xususiyatlari tahlil qilingan. Maqolada keltirilgan misollar orqali bu turdagi operatorlarning amaliyotdagi qo‘llanilishi, xususan, matematik analiz va funksional analizdagi ahamiyati ko‘rsatib berilgan.

Kalit so‘zlar: operator, operatorning aniqlanish va qiymatlar sohasi, bir jinsli operator, additiv operator, chiziqli operator, chegaralangan operator, chegaralanmagan operator, operatorning normasi.

УДК: 517.984

ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ўктамова Сабина Ғолибовна
Докторант Каршинского государственного университета
Усмонов Навруз Музаффарович
Докторант Гулистанского государственного университета

Аннотация: В данной статье подробно изложена теория линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. В частности, раскрыты основные понятия, такие как оператор, область определения и область значений оператора, однородный оператор, аддитивный оператор, линейный оператор и ограниченный оператор. Для каждого понятия приведены определения и теоремы, описывающие их свойства. Также рассмотрена норма оператора и её основные характеристики. Примеры, приведённые в статье, иллюстрируют применение таких операторов на практике, особенно в математическом и функциональном анализе.

Ключевые слова: оператор, область определения и область значений оператора, однородный оператор, аддитивный оператор, линейный оператор, ограниченный оператор, неограниченный оператор, норма оператора.

UDK: 517.984

LINEAR BOUNDED OPERATORS IN HILBERT SPACE

Sabina Golibovna Uktamova
PhD student, Karshi State University
Navruz Muzaffarovich Usmonov

PhD student, Gulistan State University

Abstract: This article provides a detailed exposition of the theory of linear bounded operators in Hilbert space. In particular, it explores key concepts such as operator, domain and codomain of an operator, homogeneous operator, additive operator, linear operator, and bounded operator. Definitions and theorems describing the properties of these concepts are presented. The norm of an operator and its main characteristics are also analyzed. Examples given in the paper illustrate the practical application of such operators, especially in mathematical and functional analysis.

Keywords: operator, domain and codomain of an operator, homogeneous operator, additive operator, linear operator, bounded operator, unbounded operator, operator norm.

Bizga H_1 va H_2Gilbert fazolari berilgan bo‘lsin.

Ta`rif 1. *Agar H_1 fazoning har bir elementiga H_2 fazoning yagona elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, bu moslik* **operator** *deyiladi va* $A: H_1 \quad H_2$ *yoki* $y = Ax\left(x \in H_1 \, y \in H_2\right)$ *kabi belgilanadi.*

Umuman A operator $x \in H_1$ ning hamma yerida aniqlangan bo‘lishi shart emas. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in H_2$ bo‘lgan barcha $x \in H_1$ lar to‘plami A operatorning **aniqlanish sohasi** deyiladi va $D(A)$ bilan belgilanadi, ya`ni

$$D(A) = \{x \in H_1 : Ax \, mavjud \, va \, Ax \in H_2\}$$

Biror $x \in D(A)$ uchun $y = Ax$bajariladigan $y \in H_2$ lar to‘plami A operatorning **qiymatlar sohasi** yoki **tasviri** deyiladi va $R(A)$ bilan belgilanadi.

$$R(A) = \{y \in H_2 : \exists \, x \in D(A), Ax = y\}.$$

Misol uchun $A: l_2 \quad l_2, Ax = (x_1, 2x_2, \ldots, n x_n, \ldots)$

operatorning aniqlanish sohasi butun fazoga teng emas. Chunki bu operator

$$x_0 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right) \in l_2$$

vektorni $A x_0 = (1,1,1,\ldots,1,\ldots)$ vektorga o‘tkazadi va bu vektor l_2 fazoning elementi bo‘lmaydi, ya’ni x_0 bu operatorning aniqlanish sohasiga teng emas.

Agar H_1 va H_2 lar chiziqli fazolar bo‘lib, istalgan $x \in H_1$ va $\lambda \in C$ uchun $A(\lambda x) = \lambda Ax$ munosabat bajarilsa,A operator **bir jinsli** deyiladi. Agar istalgan $x, y \in H_1$ uchun $A(x+y) = Ax + Ay$ munosabat bajarilsa, u holda A operator **additiv** deyiladi.

Ta'rif 2. *Bir jinsli additiv operator* **chiziqli operator** *deyiladi.*

Demak biror operatorni chiziqlilikka tekshirish uchun uni additivlik va bir jinslilikka tekshirish lozim. Chiziqli operatorning ta’rifiga ekvivalent quyidagi ta’rifni ham keltirib o‘tish foydadan xoli bo‘lmaydi:

Ta'rif 3. *Agar ixtiyoriy $x, y \in H_1$ va $\alpha, \beta \in C$ lar uchun*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

tenglik bajarilsa, u holda A **operator chiziqli** *deyiladi.*

Lekin chiziqli operatorning aniqlanish sohasi chiziqli ko‘pxillik bo‘lishi talab etiladi. Operatorning aniqlanish sohasi $D(A)$ deb belgilanadi. $R(A)$ deb esa A operatorning qiymatlar to‘plamini belgilaymiz:

$$R(A)=\{y\in H_2:\exists\, x\in D(A), Ax=y\}.$$

Misol 1. $A: L_2(T^d) \quad L_2(T^d), (Af)(x)=\int_{T^d} v(x-y)f(y)dy$ *integral operatorni qaraymiz, bu yerda* $v(\cdot)$ *biror uzluksiz funksiya. Bu operatorning aniqlanish sohasi* $D(A)=L_2(T^d)$. *Chiziqli ekanligi esa integralning chiziqli ekanligidan kelib chiqadi.*

Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik tushunchasi odatdagi funksiyaning chegaralanganligi tushunchasidan biroz farq qiladi.

Faraz qilamiz, H_1, H_2 lar Hilbert fazolari bo‘lsin.

Ta'rif 4. *Agar* $A: H_1 \quad H_2$ *operator* H_1 *dagi istalgan chegaralangan to‘plamni* H_2 *dagi chegaralangan to‘plamga o‘tkazsa, u* **chegaralangan operator** *deyiladi.*

Demak chegaralanmagan operator biror chegaralangan to‘plamni chegaralanmagan to‘plamga o‘tkazadi. Chiziqli operatorlar uchun chegaralanganlik ta’rifini quyidagicha ham berish mumkin:

Ta'rif 5. H_1 *va* H_2 *Hilbert fazolari va* $A: H_1 \quad H_2$ *chiziqli operator bo‘lsin. Agar biror* $M>0$ *son va istalgan* $x\in H_1$ *uchun*

$$\|Ax\|_{H_2}\le M\|x\|_{H_1}$$

tengsizlik bajarilsa, A **chegaralangan operator** deyiladi. Agar istalgan M soni uchun shunday $x_M\in H_1$ element mavjud bo‘lib, $\|Ax_M\|_{H_2}>M\|x_M\|_{H_1}$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, A **chegaralanmagan operator** deyiladi.

Agar A operator chegaralanmagan bo‘lsa, uning normasi ∞ ga teng deb qabul qilamiz.

Misol 3. $A: C^n \quad C^n, Az=(z_1, 2z_2, \dots, nz_n)$ *operatorni qaraylik.*

$$\|Az\|^2=\sum_{k=1}^{n} \vee k z_k ¿^2 \le n^2 \sum_{k=1}^{n} \vee z_k ¿^2 = n^2\|z\|^2$$

munosabatga asosan $\|Az\|\le n\|z\|$. Demak, ta’rifga asosan A chegaralangan operator.

Ta'rif 6. H_1 *va* H_2 *Hilbert fazolari va* $A: H_1 \quad H_2$ *chiziqli operator bo‘lsin. Istalgan* $x\in H_1$ *uchun* $\|Ax\|_{H_2}\le M\|x\|_{H_1}$ *munosabat bajariluvchi* $M>0$ *sonlarning aniq quyi chegarasi* A **operatorning normasi** *deyiladi va u* $\|A\|$ *kabi belgilanadi.*

Amalda operatorning normasini topishda quyidagi teoremadan ko‘proq foydalaniladi.

Teorema 1. $A: H_1 \quad H_2$ *chiziqli operatorning normasi uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:*

1. $\|A\| = ¿ x\ne 0 \dfrac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}}$;
2. $\|A\| = ¿ \|x\|_{H_1}<1 \|Ax\|_{H_2}$;
3. $\|A\| = ¿ \|x\|_{H_1}=1 \|Ax\|_{H_2}$.

Chiziqli chegaralangan operator xossalari:

1^0. *Agar* $A: H_1 \quad H_2$ *va* $B: H_1 \quad H_2$ *chiziqli operatorlar chegaralangan bo‘lsa, u holda ularning yig`indisi* $A+B$ *operator ham chegaralangan va* $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ *bo‘ladi.*

2^0. *Agar* $A: H_1 \quad H_2$ *chiziqli operatorlar chegaralangan bo‘lsa, u holda* $\forall\, \alpha\in C$ *uchun* αA *operator ham chegaralangan.*

3^0. *Agar* $A:H_1 \quad H_2$ *va* $B:H_1 \quad H_2$ *chiziqli operatorlar chegaralangan bo'lsa, u holda* AB *va* BA *operator ham chegaralangan va* $\|AB\| \le \|A\| \|B\|$ *bo'ladi.*

Ta'rif 7. (Geyne) X *va* Y *normalangan fazolar va* $A:X \quad Y$ *chiziqli operator bo'lsin. Agar* $x_0 \in X$ *elementga intiluvchi ixtiyoriy* $\{x_n\} \in X$ *ketma-ketlik uchun* $\{A x_n\} \in Y$ *ketma-ketlik* $A x_0 \in Y$ *elementga intilsa,* A *operator* x_0 **nuqtada uzluksiz** *deyiladi. Agar* A *operator* X *fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa u* **butun fazoda uzluksiz** *deyiladi.*

Ma`lumki uzluksiz funksiya chegaralangan bo'ladi. Chiziqli operatorlar uchun esa uzluksizlik va chegaralanganlik tushunchalari ekvivalent.

Teorema 2. H_1 *va* H_2 *Hilbert fazolari va* $A:H_1 \quad H_2$ *chiziqli operator bo'lsin. Quyidagi tasdiqlar ekvivalent:*

1. A *operator* 0 *nuqtada uzluksiz ;*
2. A *operator butun* X *fazoda uzluksiz ;*
3. A *operator chegaralangan .*

Misol 3. $l_2(Z^d)$ *fazoda quyidagi opratorni aniqlaymiz:*

$$A:l_2(Z^d) \quad l_2(Z^d), (Af)(x) = \hat{\varepsilon}(x)\hat{f}(x), x \in Z^d, \hat{f} \in l_2(Z^d),$$

bunda $\hat{\varepsilon}(x) - Z^d$ da aniqlangan biror funksiya. Ravshanki, A chiziqli operator. Bu operatorning aniqlanish sohasi

$$D(A) = \left\{ \hat{f} \in l_2(Z^d): \sum_{x \in Z^d} \vee \hat{\varepsilon}(x)\hat{f}(x) ¿^2 < \infty \right\}$$

to'plamdir. Quyidagi teorema o'rinli:

Teorema 3. A *operatorning aniqlanish sohasi butun* $l_2(Z^d)$ *fazoga teng bo'lishi uchun*

$$\underset{x \in Z^d}{¿} \vee \hat{\varepsilon}(x) \vee ¿ \infty$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Misol 4. $L_2(T^d)$ *fazoda aniqlangan ko'paytirish operatorini qaraymiz:*

$$(Af)(x) = \varepsilon(x) f(x), f \in L_2(T^d), x \in T^d,$$

bunda $\varepsilon(x) - T^d$ da aniqlanga biror kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. Ko'rinib turibdiki, A operator chiziqli. Uning aniqlanish sohasi

$$D(A) = \left\{ f \in L_2(T^d): \int_{x \in T^d} \vee \varepsilon(x) f(x) ¿^2 dx < \infty \right\}.$$

Quyidagi to'plamni kiritamiz:

$$X_n(f) = \{x \in T^d : \vee f(x) \vee ¿ n\}, f \in L_2(T^d), n \in N.$$

Ta'rif 8. *Agar biror* n *natural son uchun* $\mu(X_n(f)) = 0$ *bo'lsa,* $f \in L_2(T^d)$ *funksiya* **muhim chegaralangan** *deyiladi, bu yerda* $\mu(M) - M$ *to'plamning Lebeg o'lchovi.*

Demak, muhim chegaralanmagan $f \in L_2(T^d)$ funksiya uchun barcha natural n larda $\mu(X_n(f)) > 0$ shart bajariladi.

Teorema 4. A *operatorning aniqlanish sohasi butun* $L_2(T^d)$ *fazoga teng bo'lishi uchun* $\varepsilon(x)$ *funksiyaning muhim chegaralangan bo'lishi yetarli va zarur.*

Misol 5. $L_2(T^d)$ *fazoda aniqlangan quyidagi operatorni qaraymiz:*

$$(Af)(t)=\int_{T^d} K(t,x)f(x)\,dx, f\in L_2(T^d),$$

bunda $K(t,x)$ funksiya $T^d\times T^d$ da aniqlangan biror o‘lchovli kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya. Integralning chiziqliligidan, bu operator chiziqli. Agar

$$\int \int_{T^d} \vee K(t,x)¿^2\, dtdx<\infty$$

bo‘lsa, u chegaralangan operator bo‘ladi (Fubini teoremasi). Bunday operator integral operator deb ataladi. $K(t,x)$ funksiya esa uning yadrosi deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. M.I.Mo‘minov, C.Lokman Finiteness of discrete spectrum of the two-particle Schödinger operatori on diamond lattices. Nanosystems; physics, chemistry matematics, 2017, 8(3), P. 310-316.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука. 1989.
3. Nafasov, G., Xudoyqulov, R., & Usmonov, N. (2023). Developing logical thinking skills in mathematics teachers through digital technologies. Евразийский журнал технологий и инноваций, 1(5 Part 2), 229-233.
4. *Usmonov, N. M. (2024). Maple paketi orqali oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalarini yechish. Экономика и социум, (12-2 (127)), 928-935.*
5. *Муминов М.Э., А.М. Хуррамов А.М.* Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на одномерный решетке // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 177, №. 4. С. 102–110.
6. *Муминов М.Э.* О положительности двухчастичного гамильтониана на решетке // Теор. Мат. Физика. 2007. Т.153, №. 3. С. 381–387.
7. Usmonov, N. M. (2022). Kompleks argumentli trigonometrik va giperbolik funksiyalar. *Вестник магистратуры*, (6-3 (129)), 4-6.