# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В $\mathbf{R^2}$.

***Ашурова Зебинисо Рахимовна***

*Самаркандский Государственний Университет. Доцент, каф. ≪Математического анализа≫, Узбекистан, Самарканд*

***Жураева Умида Юсуповна***

*Самаркандский Государственний Университет. Асс, каф. ≪Математического анализа≫, Узбекистан, Самарканд*

***Тоштемирова Нилуфар Облакул кизи***

*Самаркандский Государственний Университет. Магистр, каф. ≪Математического анализа≫, Узбекистан, Самарканд*

**Аннотация:** В данной работе построена функция Карлемана для бигармонических функций заданные в области $D = \left\{y: y = (y_1, y_2), -\infty < y_1 < \infty, 0 < y_2 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\right\}$ функций заданных в двумерном пространстве.

**Ключевые слова**: Бигармонические, гармонические, полигармонические функции, формулы Грина , функция Карлемана.

**Annotation:** In this article we consider Carleman's function, to find integral representation for the biharmonic functions $(\Delta^2 \mathrm{u}(\mathrm{y}) = 0)$ defined in unbounded domain $D = \left\{y: y = (y_1, y_2), -\infty < y_1 < \infty, 0 < y_2 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\right\}$ of two dimensional Euclidean space.

**Key words:** Biharmonic, harmonic, polyharmonic functions, Green's formulas, Carleman function.

Шароф Ярмухамедов занимался исследованием классической интегральной формулы Грина для гармонических функций в неограниченной пространственных областях. Задача заключалась в получении формулы Грина для растущих гармонических функций. Здесь вместо классического фундаментального решения уравнения Лапласа надо было построить новое фундаментальное решение, которое достаточно хорошо убывает на бесконечности. Ш.Ярмухамедовым было построено требуемое фундаментальное решение в явном виде, которое выражается через целой функции комплексного переменного. Им получена интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих гармонических функций. В этом направлении им было установлено теорема типа Фрагмена - Линделефа для гармонических функций.

В этой работе используя ядро Ярмухамедова получая интегральное представление для неё получаем оценку роста функции внутри области т.е теоремы типа Фрагмена – Линделефа.

Интегральное представление в $R^2$ для бигармонических функций заданные в области $D$ которую мы намерены получить, иными словами, по граничным значениям функции восстановить ее значения всюду внутри области выражает фундаментальное свойство для бигармонических функций.

Пусть $\mathrm{R}^2$ - двухмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2), x' = (x_1, 0),\ r = |x - y|,\ s = |x' - y'|,\ \alpha^2 = s,$$

$$D = \left\{y : y = (y_1, y_2), y_1 \in R, 0 < y_2 < h, h = \frac{\pi}{\rho},\ \rho > 0\right\}.$$

Функцию $\Phi_\sigma(y, x)$ при $s > 0, \sigma \geq 0, a \geq 0$, определим:

$$\Phi_\sigma(y, x) = C_{n,m} \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{\exp(\sigma\omega + \omega^2) - achi\rho_1\left(\omega - \frac{h}{2}\right)}{\omega - x_2}\right](u^2 - s)du\,, \omega = iu + y_2, \quad (3)$$

где $C_{n,m} = \left(8\pi\Gamma^2(2)\right)^{-1}$, можно доказать что эта искомая функция.

Теорема 1. $\Phi_\sigma(y, x)$ является полигармонической функцией порядка 2 по $y$ при $s > 0$ и для этой функции имеет место

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0\left(r^2 \ln r + G_\sigma(x,y)\right),$$

где $G_\sigma(y,x)$ регулярная по переменному y и непрерывно дифференцируемая на $\overline{D}$.

Доказательство.

Для того, чтобы получить утверждение теоремы, рассмотрим подынтегральное выражение

$$J_1 = Im\left[\frac{exp\left(\sigma\omega + \omega^2 - a\cos\rho_1\left(\omega - \frac{h}{2}\right)\right)}{w - x_2}\right]$$

имея ввиду свойства гиперболических функций, получим

$$exp(\sigma\omega + \omega^2 - a\cos\rho_1\left(\omega - \frac{h}{2}\right)) =$$

$$= exp\left[\sigma(iu + y_2) + (iu + y_2)^2 - a\cos\rho_1\left(iu + y_2 - \frac{h}{2}\right)\right] = exp\left[\sigma y_2 + {y_2}^2 - u^2 - -a(ch\rho_1 u)\left(\cos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right) + i\left(\sigma u + 2uy_2 - a(sh\rho_1 u)\left(sin\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)\right)\right] =$$

$$= exp\left[\sigma y_2 + {y_2}^2 - u^2 - ach\rho_1 u cos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right] exp\, i\left(\sigma u + 2uy_2 - ash\rho_1 u sin\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right) = exp\left[\sigma y_2 + {y_2}^2 - u^2 - ach\rho_1 u cos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right]$$

$$\left(cos\left(\sigma u + 2uy_2 - ash\rho_1 u sin\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right) + i sin\left(\sigma u + 2uy_2 - ash\rho_1 u sin\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)\right)$$

$$A_1 = \sigma y_2 + {y_2}^2 - u^2 - ach\rho_1 ucos\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)$$

$$A_2 = \left(\sigma u + 2uy_2 - ash\rho_1 usin\rho_1\left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)$$

Применяя некоторые свойство комплексных чисел

$$\mathrm{Im}\frac{a+ib}{c+id} = \frac{cb-ad}{c^2-d^2} = \mathrm{Im}\frac{a+1-1+ib}{c+id} = \frac{cb-(a+1-1)d}{c^2-d^2},$$

получим:

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\omega+\omega^2-acos\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)}{\omega-x_2}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\omega+\omega^2-acos\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)-1+1}{\omega-x_2}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\omega+\omega^2-acos\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)-1}{\omega-x_2}\right] + \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right].$$

Поэтому

$$\Phi_\sigma(y,x) = c_0\int_{\sqrt{s}}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\omega+\omega^2-acos\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)-1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du$$

$$+ c_0\int_{\sqrt{s}}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du$$

Кроме того разделяя последний интеграл на две части и вычисляя

$$\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{1+s}}\frac{u}{u^2+(y_2-x_2)^2}(u^2-s)du$$

$u^2+(y_2-x_2)^2 = t,\quad u^2-s = t-r^2$

$$\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{1+s}}\frac{u}{u^2+(y_2-x_2)^2}(u^2-s)du = \int_{r^2}^{1+r^2}\frac{(t-r^2)dt}{t} = 1-r^2\int_{r^2}^{1+r^2}\frac{dt}{t} =$$

$$= 1+2r^2 lnr - r^2 ln(1+r^2)$$

имеем

$$\Phi_\sigma(\mathrm{y},\mathrm{x}) = \ c_0\int_{\sqrt{s}}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\omega+\omega^2-\mathrm{a}\cos\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)-1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du+$$

$$+\int_{\sqrt{s}}^{\sqrt{1+s}}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du+c_0\int_{\sqrt{1+s}}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du$$

Если обозначим

$$G_\sigma(\mathrm{y},\mathrm{x}) = c_0\int_{\sqrt{s}}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\omega+\omega^2-\mathrm{a}\cos\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)-1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du+1$$

$$-r^2 ln(1+r^2)+c_0\int_{\sqrt{1+s}}^{\infty}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\omega-x_2}\right](u^2-s)du$$

то

$$\Phi_\sigma(\mathrm{y},\mathrm{x}) = c_0\left(r^2\ln r+G_\sigma(\mathrm{y},\mathrm{x})\right)$$

где $G_2(x,y,\sigma)$-будет в свою очередь гармонической, легко доказать что это функция полигармонической функцией порядка 2 по $y$ при $s>0$.

Теперь мы докажем утверждение:

$\Phi_\sigma(y,x) = c_0\left(r^2\, ln\, r+G_1(x,y,\sigma)\right)$-бигармоническая функция.

Лемма 1.1.2. Если $\phi_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в $R^m$ по переменной $y$ включая и точку $x$, то справедливо равенство

$$\Delta r^k\phi_\sigma(y,x) = r^{k-2}\phi_{\sigma,1}(y,x), \quad \text{где}$$

$$\phi_{\sigma,1}(y,x) = k(m+k-2)\phi_\sigma(y,x)+2k\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{y}_j-\mathrm{x}_j)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial \mathrm{y}_j}$$

функция тоже является гармонической функцией в $R^m$ по переменному $y$ включая и точку $x$.

Теорема 2. Для функции $\Phi_\sigma(y,x)$, имеет место неравенства:

$$|\Phi_\sigma(y,x)| \leq \left(\frac{1}{r}+1\right)\frac{c_0}{exp(A)}, A = ach\alpha\rho_1$$

Доказательство.

$$\Phi_\sigma(y,x) = C_0 \int_{\sqrt{s}}^{\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma(iu+y_2)+(iu+y_2)^2 - achi\rho_1\left((iu+y_2)-\frac{h}{2}\right)\right)}{(iu+y_2)-x_2}\right](u^2 - s)du,$$

$$u^2 - s = r^2 t, \quad udu = r^2 dt, \quad du = \frac{r^2 dt}{\sqrt{r^2 t + s}}$$

$$\Phi_\sigma(y,x) = \int_0^{\infty} \mathrm{Im}\left[\frac{\exp\left(\sigma\left(i\sqrt{r^2t+s}+y_2\right)+\left(i\sqrt{r^2t+s}+y_2\right)^2 - acos\rho_1\left(i\sqrt{r^2t+s}+y_2-\frac{h}{2}\right)\right.}{\left(i\sqrt{r^2t+s}+y_2-x_2\right)}\right.$$

При $$A_1 = \sigma y_2 + {y_2}^2 - r^2 t - s - ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}\cos\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)$$

$$A_2 = \left((\sigma+2y_2)\sqrt{r^2t+s} + -ash\rho_1\sqrt{r^2t+s}sin\rho_1\left(y_2-\frac{h}{2}\right)\right)$$

$$Q = exp(\sigma y_2 + \ {y_2}^2)$$

$$\Phi_\sigma(\mathrm{y},\mathrm{x})$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{Q(cosA_2 + \ i\,sinA_2)(\mathrm{y}_2 - \mathrm{x}_2 - \ i\sqrt{r^2t+s})}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)\right)exp(r^2t+s)(\mathrm{y}_2-\mathrm{x}_2+i\sqrt{r^2t+s})(\mathrm{y}_2\right.$$

$$\Phi_\sigma(\mathrm{y},\mathrm{x})$$

$$= r^2\int_0^\infty \frac{Q(\mathrm{y}_2-\mathrm{x}_2)sinA_2 - \ \sqrt{r^2t+s}cosA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)\right)(t+1)exp(r^2t+s)}\frac{tdt}{\sqrt{r^2t+s}} =$$

$$= r^2\int_0^\infty \frac{Q(\mathrm{y}_2-\mathrm{x}_2)sinA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{rt+s}cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)\right)exp(r^2t+s)(t+1)}\frac{tdt}{\sqrt{r^2t+s}} \quad -$$

$$-r^2\int_0^\infty \frac{QcosA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)\right)(t+1)}\frac{tdt}{exp(r^2t+s)}$$

Обозначая

$$\Phi_\sigma(y,x) = r^2J_1^1 - r^2J_1^2$$

где

$$J_1^1 = \int_0^\infty \frac{Q(\mathrm{y}_2-\mathrm{x}_2)sinA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)\right)exp(r^2t+s)(t+1)}\frac{tdt}{\sqrt{r^2t+s}}$$

$$J_1^2 = \int_0^\infty \frac{QcosA_2}{exp\left(ach\rho_1\sqrt{r^2t+s}cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)\right)(t+1)}\frac{tdt}{exp(r^2t+s)}$$

$$A = \sigma y_2 + {y_2}^2 - s - ach\rho_1\alpha cos\rho_1\left(y_2-\frac{\mathrm{h}}{2}\right)$$

$$|J_1^1| = \int_0^\infty \left| \frac{1}{(t+1)} \frac{(y_2 - x_2)\sqrt{t}}{\sqrt{r^2 t + s}} \frac{Q \sin A_2}{exp\left(ach\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}\cos\rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)} \right| \frac{\sqrt{t}dt}{exp(r^2 t + s)} \le \frac{\sqrt{\pi}}{r^{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} \boldsymbol{exp(A)}}$$

$$|J_1^1| \le \frac{1}{r^3} \frac{c_0}{exp(A)}$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{p-\frac{1}{2}}dt}{exp(at)} = \frac{135\ldots\ldots(2p-1)}{2^p} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{p+\frac{1}{2}}}, \qquad \int_0^\infty \frac{\boldsymbol{dt}}{\boldsymbol{exp(r^2 t + s)}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{r^2}}$$

$$|J_1^2| = \int_0^\infty \left| \frac{t}{(t+1)} \frac{Q \cos A_2}{exp\left(ach\rho_1 \sqrt{r^2 t + s}\cos\rho_1 \left(y_2 - \frac{h}{2}\right)\right)} \right| \frac{dt}{exp(r^2 t + s)}$$
$$\le \frac{c_0}{r^2 \boldsymbol{exp(A)}}$$

Итак, $|\Phi_\sigma(y,x)| \le \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2}\right) \frac{r^2 c_0}{exp(A)} = \left(\frac{1}{r} + 1\right) \frac{c_0}{exp(A)}$.

**Вывод:** В этой работе используя свойств ядро Ярмухамедова построив функцию Карлемана получим интегральное представление т.е интегральная формула Грина в неограниченной области в классе растущих бигармонических функций. Интегральное представление в $R^2$ для бигармонических функций заданные в области D которую мы намерены получить, иными словами, по граничным значениям функции восстановить ее значения всюду внутри области выражает фундаментальное свойство для бигармонических функций и для неё получаем оценку роста функции внутри области т.е теоремы типа Фрагмена – Линделефа.

**Список литературы:**

**[1]** Sh.Y.Yarmukhamedov, Задача Коши для полигармонического уравнения, Доклады РАН., 388(2003), 162-165.

**[2]** Z.R.Ashurova, N.YU.Jurayeva, U.Yu.Jurayeva, О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, International Journal of Innovative Research, 10(2021), Impact Factor 7.512.

**[3]** Z.R.Ashurova, N.YU.Jurayeva, U.Yu.Jurayeva, Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem, Journal of Critical Reviews, Scopus. http://dx.doi.org/10.31938.jcr.07.06.62, Volume 7,Issue 7(2020), ISSN 2394-5125, P371-378. Country: India

**[4]** Z.R.Ashurova, N.YU.Jurayeva, U.Yu.Jurayeva, Task Cauchy and Carleman function, Academicia:

**[5]** Ш.Ярмухамедов, Формула Грина в бесконечной области и ее применение, ДАН СССР, 285(1985),№2, 697-700.

**[6]** Н.Ю.Жураева,У.Ю.Жураева,У.Саидов, Функция Карлемана для полигармонических функций для некоторых областей лежащих в m-мерном четном евклидовом пространстве, Uzbek Mathematical Journal, 3(2011). – 338