СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Раджабова Нигина Шухратовна
студентка 1 курса ТГЭУ
Ташкент, Узбекистан.

Абдужалилова Муслимахон Абдулазиз кизи
студентка 1 курса ТГЭУ
Ташкент, Узбекистан.

Шермухамедов Абдурашид Баходир угли
студент 1 курса ТГЭУ
Ташкент, Узбекистан.

Пошаходжаева Г. Д.
Ташкентский государственный экономический университет
Доцент кафедры «Высшей и прикладной математики»

Аннотация: В статье рассматривается применение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при моделировании экономических процессов, в частности задач экономического равновесия. Основное внимание уделено сравнительному анализу двух классических методов решения СЛАУ: правила Крамера и метода Гаусса. Показано, каким образом параметры экономической системы формируют математическую модель в виде системы линейных уравнений, а решение данной системы позволяет определить равновесные значения экономических показателей. В работе анализируются условия применимости рассматриваемых методов, их вычислительная эффективность и практическая целесообразность использования в экономических расчетах. Подчеркивается, что выбор метода решения СЛАУ оказывает существенное влияние на удобство анализа и интерпретацию результатов, особенно при работе с моделями различной размерности. Результаты исследования могут быть использованы в учебном процессе при изучении экономико-математических методов и линейной алгебры.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, экономическое равновесие, метод Крамера, метод Гаусса, линейная алгебра, экономический анализ.

COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN ECONOMIC EQUILIBRIUM PROBLEMS

Radjabova Nigina Shuxratovna
1st-year student, TSUE

Abdujalilova Muslimakhon Abdulaziz kizi
1st-year student, TSUE

Shermukhamedov Abdurashid Bakhodir ugli
1st-year student, TSUE

Poshakhodjaeva G. D.

Associate Professor, Tashkent State University of Economics
Department of Higher and Applied Mathematics

Abstract: This paper examines the application of systems of linear algebraic equations (SLAE) in modeling economic processes, in particular problems of economic equilibrium. The main focus is placed on a comparative analysis of two classical methods for solving systems of linear equations: the Cramer's rule and the Gaussian elimination method. The paper demonstrates how the parameters of an economic system form a mathematical model in the form of a system of linear equations, and how solving this system makes it possible to determine equilibrium values of economic indicators. The conditions of applicability of the considered methods, their computational efficiency, and the practical feasibility of their use in economic calculations are analyzed. It is emphasized that the choice of a method for solving systems of linear equations has a significant impact on the convenience of analysis and interpretation of results, especially when working with models of different dimensions. The results of the study can be used in the educational process when studying economic and mathematical methods and linear algebra.

Keywords: system of linear algebraic equations, economic equilibrium, Cramer's rule, Gaussian elimination method, linear algebra, economic analysis.

Введение. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) широко применяются в экономическом анализе для моделирования взаимосвязей между экономическими показателями, такими как цены, объемы производства, издержки и спрос. Во многих задачах экономического равновесия такие взаимосвязи естественным образом приводят к необходимости решения систем линейных уравнений.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) представляет собой классический объект изучения в линейной алгебре. Основная задача заключается в нахождении таких значений неизвестных переменных, при которых каждое уравнение системы превращается в истинное равенство. В общем случае система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет подобный вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Наряду с этим через x_1, x_2, …, x_n обозначены неизвестные, подлежащие определению (число n не обязательно должно быть равно числу уравнений m); коэффициентами системы выступают значения a_{11}, a_{12}, …, a_{mn}, а в качестве свободных членов присутствуют b_1, b_2, …, b_m, которые уже предполагаются изначально известными. Каждый коэффициент системы a_{ij} имеет два индекса, первый из которых указывает номер уравнения - i, второй, - номер неизвестного - j, при котором стоит данный коэффициент.

Система (1) несет название однородной, при условии, что все ее свободные члены b_1, b_2, …, b_m равны нулю.

Однако, если хотя бы один из свободных членов b_1, b_2, …, b_m не равен нулю, то тогда данная система называется неоднородной.

Помимо этого, система уравнений может называться квадратной, если число m лежащих в ней уравнений равно числу неизвестных n.

Решением системы (1) называется такое сочетание n чисел c_1, c_2, …, c_n, которое при подстановке, на место неизвестных x_1, x_2, …, x_n, превращает все уравнения этой системы в тождества.

Система уравнений (1) называется совместной, при условии, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если у нее не существует ни одного решения.

Совместная система уравнений вида (1) может иметь только одно, либо несколько решений.

Таким образом, были определены основные понятия, связанные с системами линейных уравнений, включая однородные и неоднородные, квадратные и совместные системы. В дальнейшем будет рассмотрено решение таких систем, их свойства, на примере задач экономического равновесия, отражающих взаимодействие взаимосвязанных рынков.

Экономическая постановка задач, приводящих к системе линейных уравнений. Экономические процессы часто характеризуются наличием взаимосвязей между несколькими показателями, когда изменение одного, влияет на значения остальных. В ситуации равновесия такие взаимосвязи могут быть описаны с помощью линейных зависимостей, что приводит к формированию системы линейных алгебраических уравнений. Решение данной системы позволяет определить равновесные значения экономических переменных и провести анализ состояния рассматриваемой экономической системы.

В качестве примера рассмотрим задачи, отражающие взаимодействие взаимосвязанных рынков, а также распределение объемов производства в условиях заданных экономических ограничений.

Экономическая задача №1. Решение экономической задачи методом Крамера. Нам даны два взаимосвязанных рынка товаров А и В. Пусть равновесные цены на данные товары обозначены через x_1 и x_2 соответственно. По результатам анализа спроса и предложения на товар были получены следующие зависимости между ценами товаров:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases} \quad (2)$$

Данная система (2) отражает условия равновесия на рынках товаров A и B, и для ее решения, в первую очередь, нужно записать систему уравнений в матричном виде:

$$Ax = b$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Теперь нам нужно вычислить определитель нашей матрицы коэффициентов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5,\ \Delta \neq 0$$

В данном случае, система имеет лишь одно единственное решение. Двигаясь дальше, нам нужно найти частные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix} = 10 \cdot 3 - 1 \cdot 15 = 15$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 15 - 10 \cdot 1 = 20$$

Тогда, по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 4$$

Полученные значения $x_1=3$ и $x_2=4$ в свою очередь являются значениями равновесной цены товаров A и B. При данных ценах, спрос и предложение на обоих рынках находятся в состоянии равновесия.

Экономическая задача №2. Решение экономической задачи методом Гаусса. Рассмотрим экономическую систему, в которой присутствуют три взаимосвязанных сектора производства. Пусть объемы выпуска данных секторов обозначены через x_1, x_2, x_3. В то же время, экономические ограничения на выпуск продукции задаются следующей системой линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 80 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 120 \end{cases} \qquad (3)$$

Запишем расширенную матрицу системы (3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 60 \\ 2 & 1 & 1 & & 80 \\ 1 & 2 & 3 & & 120 \end{pmatrix}$$

Теперь приступаем к элементарным преобразованиям строк:

$$R_2 \to R_2 - R_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 60 \\ 1 & 0 & 0 & & 20 \\ 1 & 2 & 3 & & 120 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_1$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & & 60 \\ 1 & 0 & 0 & & 20 \\ 0 & 1 & 2 & & 60 \end{pmatrix}$$

Теперь, взяв вторую строку, выразим $x_1 = 20$. Далее, подставив это в третью строку, получаем:

$$x_2 + 2x_3 = 60$$

Подставляя $x_1 = 20$ в первую строку, получаем:

$$x_2 + x_3 = 40$$

Решаем новую систему:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 40 \\ x_2 + 2x_3 = 60 \end{cases}$$

$$x_3 = 20,\ x_2 = 20$$

Отсюда делаем вывод, что равновесные объемы выпуска трех секторов составляют:

$$x_1 = 20,\ x_2 = 20,\ x_3 = 20$$

Что означает, что при данных объемах выпуска экономическая система линейных алгебраических уравнений удовлетворяет всем заданным изначально ограничениям выпуска.

Сравнительная характеристика методов решения СЛАУ.

Критерий сравнения	Метод Крамера	Метод Гаусса
Область применимости	Квадратные системы с ненулевым определителем	Системы любого вида (квадратные и прямоугольные)
Размерность системы	Эффективен только для систем малой размерности (2–3 уравнения)	Применим для систем большой размерности
Вычислительная сложность	Высокая при увеличении числа переменных	Относительно низкая, алгоритмическая

Наглядность решения	Высокая, аналитическое выражение решения	Ниже, требует последовательных преобразований
Применимость в экономике	Используется в основном в учебных и теоретических задачах	Основной метод в прикладных экономических расчетах

Анализ результатов. Из выше представленной таблицы, можно заметить, что правило Крамера обладает высокой наглядностью и позволяет получить решение системы линейных алгебраических уравнений довольно простым путем. Тем не менее, рост вычислительной сложности при увеличении размерности системы существенно ограничивает ее практическое применения в экономическом анализе. Метод Гаусса, наоборот, является более универсальным и удобным способом решения систем линейных уравнений. Его использование открывает возможность эффективной работы с экономическими моделями, включающими большое количество переменных, что делает данный метод предпочтительным в прикладных расчетах.

Заключение. В ходе данной научной работы были рассмотрены системы линейных алгебраических уравнений, как инструмент математико-экономического моделирования. Было показано, что задачи экономического равновесия по сути своей приводят к необходимости решения систем линейных уравнений, позволяющих определить равновесные значения экономических показателей. На примере двух экономических задач были продемонстрированы методы решения СЛАУ с использованием правила

Крамера и метода Гаусса. После этого, сравнительный анализ показал, что правило Крамера наиболее целесообразнее использовать при решении систем малой размерности, в то время как метод Гаусса является более универсальным и эффективным инструментом, где размерность систем больше. Таким образом, выбор метода решений системы линейныз уравнений должен основываться на особенностях той или иной экономической задачи, а также размерности самой системы.

Использованная литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Курс высшей математики и математической физики. Линейная алгебра. - 4-е изд. - М.: Наука. Физматлит, 1999. - 240 с. - С. 64-82.
2. Методы решения систем линейных уравнений: методические указания к выполнению самостоятельной работы по математике для студентов ФАВТ, ФМА и ФФиТРМ очного и заочного отделений / сост. Власьева В.А., Салищева О.Г., Якубович Ю.В. - СПб.: СПбГУКиТ, 2011. - 26 с.\
3. Велько О.А., Мартон М.В., Моисеева Н.А. Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере: учеб.-метод. пособие. - Минск: БГУ, 2023. - 74 с. - С. 39-50.
4. Лекции по высшей математике Ташкентского государственного экономического университета: учебно-методические материалы. - Ташкент, б.г.