СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РЕШЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Барлыкбаев Абдулазиз Жумабаевич
Студент СТ-30/25
Ташкентского государственного экономического университета
Узбекистан, Ташкент

Нурымбетова Айзада Гайбулла кизи
Студентка СТ-32/25
Ташкентского государственного экономического университета
Узбекистан, Ташкент

Пошаходжаева Гулнора Джабборхановна
Ташкентского государственного экономического университета
Доцент кафедры «Высшей и прикладной математики»

Аннотация: В данной научной работе рассматривается понятие системы линейных уравнений и её применение в экономике. Раскрываются основные свойства систем линейных уравнений и их роль при моделировании экономических процессов, таких как распределение ресурсов, анализ спроса и предложения, межотраслевые балансы и планирование производства. Представлены и проанализированы наиболее распространённые методы решения систем линейных уравнений, включая метод Гаусса, метод Крамера и метод обратной матрицы.

Ключевые слова и словосочетания*:* линейное уравнение, система линейных уравнений, основная матрица системы, *обратная матрица*, *метод Крамера*, расширенная матрица системы, решение системы, метод

Гаусса, треугольная система, базисные неизвестные, свободные неизвестные.

SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS IN SOLVING ECONOMIC PROBLEMS

Barlykbaev Abdulaziz Zhumabayevich
Student ST-30/25
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

Nurimbetova Ayzada Gaybulla qızı
Student ST-32/25
Tashkent State University of Economics
Uzbekistan, Tashkent

Poshakhodjaeva Gulnora Dzhabborkhanovna
Associate Professor
Tashkent State University of Economics
Department of Higher and Applied Mathematics

Abstract: This research paper examines the concept of a system of linear equations and its application in economics. It explores the fundamental properties of systems of linear equations and their role in modeling economic processes, such as resource allocation, supply and demand analysis, input-output balances, and production planning. The most common methods for solving systems of linear equations are presented and analyzed, including the Gaussian method, Cramer's method, and the inverse matrix method.

Key words and phrases: linear equation, system of linear equations, fundamental matrix of the system, inverse matrix, Cramer's method, augmented matrix of the system, solution of the system, Gauss method, triangular system, basis unknowns, free unknowns.

Введение: Системы линейных алгебраических уравнений являются одним из ключевых объектов исследования линейной алгебры и представляют собой универсальный математический аппарат для описания широкого круга теоретических и прикладных задач. Они возникают при моделировании процессов в физике, механике, экономике, информатике, а также при анализе сложных инженерных и технических систем

Система линейных алгебраических уравнений

Системой из *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1.1)$$

Здесь переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются неизвестными системы, числа a_{ij}, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, называются коэффициентами системы,

а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободными членами.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающие все уравнения системы в тождества, называются решением системы. Система уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Если система линейных алгебраических уравнений имеет хотя бы одно решение, ее называют совместной, если же решений нет – несовместной. Если совместная система линейных алгебраических уравнений имеет ровно одно решение, её именуют определённой, если бесконечное множество решений – неопределённой

Имеется более краткая запись система линейных алгебраических уравнений, она состоит в следующем. Обозначаем через **A** матрицу размера $m \times n$, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Она называется матрицей системы. Столбец свободных членов обозначим через $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ а столбец из неизвестных системы — через $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Тогда систему (1.2) можно записать в виде матричного уравнения: $AX = B$.

Эта запись называется матричной формой записи системы.

В случае, если матрица A квадратная, матричная форма записи позволяет решить систему с использованием обратной матрицы A^{-1}.

Метод обратной матрицы

Теорема. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), имеющая квадратную невырожденную матрицу, имеет единственное решение, которое находится по формуле: $X=A^{-1}B$.

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений в матричном виде $AX = B$. Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1}. Тогда получим $A^{-1}AX=A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A=E$, где E — единичная матрица, то получим $EX=A^{-1}B$. Следовательно, $X=A^{-1}B$. Что и требовалось доказать.

Определение. Метод решения системы линейных алгебраических уравнений с использованием формулы $X=A^{-1}B$ называется **методом обратной матрицы.**

Пример. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases} \qquad (1.3)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме данная система имеет вид: AX=B. Найдем определитель Δ. Если Δ=detA≠0 то матрица A – невырожденная, и существует обратная матрица A^{-1}.

Находим матрицу A’, транспонированную к A:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу Ã, учитывая что

$$A'_{ij} = A_{ji} : \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Вычисляем обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$ Теперь по формуле

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера

Теорема (Крамера). Пусть система линейных алгебраических уравнений имеет квадратную матрицу коэффициентов A n-го порядка и $\Delta = \det A \neq 0$. Пусть Δ_j — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда данная система имеет единственное решение, которое определяется по формулам $x_j = \Delta_j / \Delta$, j=1,2, …,n. Эти формулы называются **формулами Крамера**.

Снова рассмотрим систему (1.3). Найдем определитель системы $\Delta = |A|$.

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Если $\Delta = \det A \neq 0$, то по теориями Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц Δ_1, Δ_2, Δ_3, полученных из матрицы A заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix};$$

Теперь по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta}; \qquad x_3 = \frac{\Delta 3}{\Delta}.$$

В конце решения системы, независимо от выбранного метода, рекомендуется выполнить проверку, подставив найденные значения переменных в уравнения системы и убедиться в том, что они обращаются в верные равенства.

Существенным недостатком решения систем из n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера и с использованием обратной матрицы является их высокая вычислительная трудоёмкость, обусловленная необходимостью вычисления определителей и нахождения обратной матрицы. В связи с этим данные методы имеют преимущественно теоретическое значение и на практике редко применяются для решения реальных экономических задач, которые, как правило, сводятся к системам с большим числом уравнений и переменных.

Метод Гаусса

Метод Гаусса, или метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находится все остальные переменные.

Для исследования систем линейных алгебраических уравнений и нахождения их решений используется метод Гаусса. Исследовать систему — значит определить, является ли она совместной, и в случае совместности установить, сколько решений она имеет.

Снова рассмотрим систему (1.3).

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

Будем для определенности считать, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Если это не так, то надлежащим образом изменим нумерацию неизвестных. Преобразуем систему, включая неизвестное x_1 из всех уравнений, кроме первого.

Для этого обе части первого уравнения умножим на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычтем из соответствующих частей второго уравнения, затем обе части первого уравнения, умноженные на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$, вычтем из соответствующих частей третьего уравнения и т. д.

Предполагая после этого, что $a_{22} \neq 0$, аналогичным способом исключим неизвестное x_2 из всех уравнений, кроме второго, и т.д.

В результате таких преобразований мы или получим совместную ступенчатую систему, эквивалентную системе (1.3), или придем к несовместной ступенчатой системе, в которой одно из уравнений имеет отличный от нуля свободный член, а все коэффициенты левой части равны нулю. В этом случае система (1.3) также является несовместной. Легко увидеть, что таким способом можно любую систему линейных уравнений привести к ступенчатому виду. Следовательно, решение любой системы сводится к решению ступенчатой системы.

Применение систем линейных уравнений в экономике

Применение систем линейных уравнений позволяет упростить сложные экономические ситуации, представить их в формализованном виде и получить количественные результаты, необходимые для принятия обоснованных решений. Именно поэтому изучение данной темы является важным этапом в понимании экономических моделей и механизмов функционирования экономики в целом.

Задача 1. Кондитерская фабрика в течение трех дней производила торты, пирожные и печенье. Известны объемы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти три дня. Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

День	**Объем выпуска продукции(единиц)**			**Затраты (тыс.усл.ед)**
	торты	пирожные	печенье	
1	5	25	30	120
2	10	15	30	105

3	15	20	20	125

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 20 & 30:120 \\ 10 & 15 & 30:105 \\ 15 & 20 & 20:125 \end{pmatrix}$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 5 \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (-2) (-3) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй.

$$\begin{pmatrix} 5 & 25 & 30: & 120 \\ 0 & -35 & -30: & -135 \\ 0 & -55 & -70: & -235 \end{pmatrix}$$

Шаг 2. Теперь вторую строку умножаем на (-55/35) и прибавляем полученную строку к третьей строке.

$$\begin{pmatrix} 5 & 25 & 30: & 120 \\ 0 & -35 & -30: & -135 \\ 0 & 0 & \frac{-160}{7}: & \frac{-160}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5x+25y+30z=120 \\ -35y-30z=-135 \\ \frac{-160}{7}z=\frac{-160}{7} \end{cases}$$

Откуда используем обратный ход метода Гаусса, найдем из третьего уравнения z = 1; из второго y = $\frac{135-30z}{35}$ = $\frac{135-30}{35}$ = 3; из первого уравнения

x = $\frac{120-25y-30z}{5} = \frac{120-75-30}{5}$ = 3, т.е. решение системы (3;3;1).

Ответ. Себестоимость одного торта равна 3 тысяч условных единиц, одного пирожного равна 3 тысяч условных единиц, одного печенья равна 1 тысяч условных единиц.

Задача 2. Фабрика изготавливает продукции трех видов: дверь, парта и стульчик, используя сырье трех типов. Известна норма расхода на единицу изделия и объем расхода сырья на одну неделю (указаны в таблице). Найти еженедельной объем выпускаемой продукции каждого вида.

Вид сырья	**Норма расхода сырья на ед. изд.**			**Недельный расход сырья (условных единиц)**
	Дверь	Парта	Стульчик	
S_1	1	3	2	327
S_2	0	1	4	227
S_3	2	2	3	391

Пусть x,y,z – еженедельный объем выпуска двери, парты и стульчиков соответственно.

Решение. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y+2z=327 \\ y+4z=227 \\ 2x+2y+3z=391 \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений методом Крамера:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 3 + 24 + 0 - 4 - 8 - 0 = 15$$

$$\Delta_x = \begin{bmatrix} 327 & 3 & 2 \\ 227 & 1 & 4 \\ 391 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 981 + 4692 + 908 - 782 - 2043 - 2616 = 1140$$

$$\Delta_y = \begin{bmatrix} 1 & 327 & 2 \\ 0 & 227 & 4 \\ 2 & 391 & 3 \end{bmatrix} = 681 + 2616 + 0 - 908 - 0 - 1564 = 825$$

$$\Delta_z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 327 \\ 0 & 1 & 227 \\ 2 & 2 & 391 \end{bmatrix} = 391 + 1362 + 0 - 654 - 0 - 454 = 645$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{1140}{15} = 76 \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{825}{15} = 55 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{645}{15} = 43$$

Ответ. Еженедельный объем выпускаемых продукции: 76 штук дверей, 55 штук парт и 43 штук стульчиков.

Заключение.

В данной работе были рассмотрены основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений: метод обратной матрицы, правило Крамера и метод Гаусса. Каждый из этих методов имеет свои особенности и применяется в зависимости от условий конкретной задачи.

Метод Гаусса является наиболее универсальным и подходит для решения систем любого порядка. Правило Крамера удобно использовать для систем малого размера, а метод обратной матрицы эффективен при условии существования обратимой матрицы. Применение данных методов позволяет корректно и эффективно находить решения систем линейных уравнений.

Использованная литература:

1. Н.Ш. Кремер Высшая математика для экономистов – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. – 479 с. – (Серия «золотой фонд российских учебников»)
2. https://share.google/qHrfR7CYJdyxFircs

3. Лекции по высшей математике Ташкентского государственного экономического университета: учебно-методические материалы. - Ташкент.

4. И.В. Виленкин, В.М. Гровер, Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов – издание четвертое, исправленное, 2008г. – 416 с.