IKKI ARGUMENTLI FUNKSIYA EKSTREMUMLARI. IKKI O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING YOPIQ SOHADAGI ENG KATTA VA ENG KICHIK QIYMATLARINI TOPISH.

Saipnazarov Jonibek Muxammadiyevich
TATU Qarshi filiali Dasturiy injiniring kafedrasi o'qituvchisi
Usmonov Maxsud Tulqin o'g'li
Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
Qarshi filiali 4-kurs talabasi

ANNOTATSIYA: Ushbu maqolada matematikaning eng qiziq mavzularidan biri bo'lgan Ikki argumentli funksiya ekstremumlari. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish haqida ma'lumotlar berib o'tildi va mavjud muanmolarga ilmiy yondashildi. Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

KALIT SO'ZLAR: Ikki argumentli funksiya ekstremumi, Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Extremums of a function with two arguments. Find the maximum and minimum values of a function of two variables in a closed field.

Saipnazarov Jonibek Muxammadiyevich
Teacher of Software Engineering, Karshi branch of TUIT
Usmonov Maxsud Tulqin o'g'li
Tashkent University of Information Technologies
Karshi branch 4th year student

ABSTRACT: The extremums of the two-argument function, one of the most interesting topics in mathematics in this article. Information on finding the largest and smallest values of a function of two variables in a closed field was given, and a scientific approach to the existing problems was given. The maximum or minimum of a function is called its extremum. A point that has a function extremum is called its extremum point. The function extremum is checked using special derivatives.

KEYWORDS: Extremum of a function with two arguments, Finding the maximum and minimum values of a function with two variables in a closed field.

1. **Ikki argumentli funksiya ekstremumi**.

1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0; y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni $f(x_0; y_0) > f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

2-ta'rif. $z = f(x,y)$ funksiyaning $P_1(x_1;y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni $f(x_1;y_1) < f(x,y)$ bo'lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_1(x_1;y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada uzluksiz $z = f(x,y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{aligned}\right\}$$

bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. SHuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmasligi ham mumkin.

Ekstremumning yetarli shartlari:

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xy}(x_0,y_0); B = f''_{xy}(x_0,y_0); C = f''_{yy}(x_0,y_0);$$

bilan belgilaymiz va $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib: 1) A<0 bo'lganda $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada maksimumga,

2) A>0 bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada ekstremum yo'q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\left.\begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} y = x - x^3 = x(1-x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \left[x(1-x^2)\right]^3 + x - x^{+x^3} = 0, \\ (1-x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned}\right\}.$$

Demak, uchta O(0,0), $P_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ va $P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ xususiy hosilalar XOU tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$f''_{xx}(x,y)=12x^2-4;\ f''_{xy}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=12y^2-4;$

O(0,0) nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A=-4,\quad B=4,\quad C=-4$; $\Delta = AC-B^2 = -4\cdot(-4)-4^2=0$ bo'lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan OX o'qi bo'yicha ($y=0$)

$$f(x,y)_{y=0} = f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.$$

$y=x$, bissektrisa bo'yicha $\quad f(x,y)\big|_{y=x} = f(x,x)=2x^4>0$

bo'ladi. Shunday qilib, O(0,0) biror atrofida $\Delta f(x,y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC-B^2=400-16>0$ va A=20>0 demak $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega. $f_{\min}=-8;$

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ nuktada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun A=20, $B=4, C=20$ bo'lib $\Delta = AC-B^2=400-16>0$ va A=20>0 bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo'ladi, $f_{\min}=-8$

2-misol. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

$P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nukta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z=\sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuktaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni $P_0(1;1)$ nuktada funksiya minimumga ega $z_{\min}=f(1;1)=0;$

2. Ikki o'zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Chegaralangan yopiq sohada differensiallan- uvchi funksiya o'zining ***eng katta va eng kichik qiymatiga*** yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida erishadi.

1-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funksiyaning $x \le 0, y \le 0, x + y \ge -3$ sohadagi eng katta va eng kichik kiymatlarini toping.

Echish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo'lib, P_0(-1,-1) kritik nuqtaga ega bo'lamiz. Funksiyani soxa chegarasida tekshiramiz: A0 chegarada $y = 0$ bo'lib, $z = x^2 + x$ funksiya xosil bo'ladi. Bu funksiyaning ekstremumi: $z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ bo'ladi. Demak, P_1(-0,5, 0) AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya xosil bo'lib, $z'_y = 2y + 1 = 0$ y=-1/2.

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$ bo'lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo'lib $z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\frac{3}{2}$. AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo'ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz

$z_0 = f(P_0) = f(-1,-1) = -1$; $\quad z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4}$;

$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$; $\quad z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$;

$z_4 = f(0) = f(0,0) = 0$; $\quad z_5 = f(A) = f(-3,0) = 6$;

$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6$.

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab $z_{eng\, kat.} = f(A) = f(B) = 6$ va $z_{eng\, kich.} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz .

Adabiyotlar ro'yxati:

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco "Mathematical Analysis", Italy, Springer, I-part, 2008, II-part, 2010.
2. W. WL.Chen "Linear algebra ", London, Chapter 1-12, 1983, 2008.

3. W.WL.Chen “Introduction to Fourier Series”, London, Chapter 1-8, 2004, 2013.
4. W.WL.Chen “Fundamentales of Analysis”, London, Chapter 1-10, 1983, 2008.
5. Soatov Yo U. Oliy matematika. T., O’qituvhi, 1995. 1- 5 qismlar.
6. Azlarov T., Mansurov X. Matematik analiz, - Toishkent, O’qituvhi, 1-qism, 1989.
7. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Рады. Функции комплексного переменного. - Наука, 1997.
8. V.Ye.Shneyder, A.I.Slutskiy, A.S.Shumov. Qisqaha oliy matematika kursi. T., 1985., 2-qism.
9. Беклемишев. Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. -М.: Наука, 1984.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1983.
11. Piskunov N.S. Differensial va integral hisob. Oliy texnika o’quv yurtlari talabalari uchun o’quv qo’llanma. Toshkent, O’qituvchi, 1974, 1, 2-qism.
12. Математика в нефтегазовом образовании. Теория и задачи. Выпуск 3. Часть 1. Неопределенные и определенные интегралы. –М.: 2005.

Jo’rayev T., Sa’dullayev A., Xudoyberganov B., Mansurov X., Vorisov A. Oliy matematika asoslari. T.2., Toshkent, “O’zbekiston”, 1999