KUTISHLI XIZMAT KO'RSATISH TARMOG'INING BANDLIK DAVRLARI TAQSIMOTI

Husanov Farrux Oltinboyevich
Samarqand iqtisodiyot va servis instituti
Oliy matematika kafedrasi dotsent v.b.

Annotatsiya: Maqola kutishli xizmat ko'rsatish tarmog'ining bandlik davrlari taqsimoti funksiyalari va bandlik davrida xizmat ko'rsatishning vaqt oraliqlari haqida.

Kalit so'zlar: kutishli xizmat ko'rsatish, bandlik davri, xizmat ko'rsatish vaqti, Rushe teoremasi, Boxner-Xinchin teoremasi, Laplas-Stiltes almashtirishi.

Husanov Farrukh Oltinboyevich
Samarkand Institute of Economics and Service
Associate Professor of the Department of
Higher Mathematics

Abstract: The article is about the functions of the distribution of busy periods of the waiting service network and the time intervals of service during the busy period.

Key words: waiting service, busy period, service time, Rushe's theorem, Bochner-Hinchin theorem, Laplace-Stiltes substitution.

Xizmat ko'rsatish korxonalarining samarali ishlashi va mijozlarga yuqori sifatli xizmat ko'rsatish uchun optimal rejalashtirish juda muhimdir. Bu, mijozlarning kutish vaqtini kamaytirish, xizmatlarini tezroq taqdim etish va xizmat sifatini oshirishga yordam beradi.

Kutishli xizmat ko'rsatish tarmog'ining bandlik davrlari, tizimning qanday ishlayotganligi va xizmat ko'rsatishga ehtiyojni ta'minlash uchun ahamiyatlidir. Bu, xizmat ko'rsatish sohasida mustahkam ish jarayonini yaratishga yordam beradi. Bundan tashqari, bandlik davrlari, xizmatni yaxshi tashkil etish va uning samaradorligini oshirishga yordam beradi.

Bitta xizmat ko'rsatish uskunasidan iborat xizmat ko'rsatish sistemasiga $A(t)$ taqsimot funksiyasi orqali aniqlanadigan rekkurent chaqiruvlar oqimi kelayotgan bo'lsin. Bu chaqiriqlarga bir xil $B(t)$ taqsimot funksiya bo'yicha xizmat ko'rsatilsin.Agar chaqiruv sodir bo'lganda uskuna boshqa chaqiriqqa xizmat ko'rsatayotgan bo'lsa, u navbatga qo'yiladi va xizmat boshlanishini kutib turadi.

Vaqtning uskuna uzluksiz xizmat ko'rsatayotgan oralig'ini uning bandlik davri deb ataymiz. Bandlik davri taqsimot funksiyasi $\Pi(t)$ orqali belgilaymiz.

1-teorema. Agar $A(t)=1-e^{-at}$ bo'lsa, u holda

$$\pi(s)=\beta(s+\alpha-\alpha\pi(s)) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu funksional tenglama yarim tekislikda analitik, ¿$\pi(s)\vee$¿1 shartni qanoatlantiruvchi va

$$\pi(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\Pi(t), \qquad (\Pi(t)-kamaymovchi\, funksiya)$$

ko'rinishda ifodalovchi yagona $\pi(s)$ funksiyani aniqlaydi. Bu yerda

$$\Pi(+\infty)=\begin{cases}1, agar\, \alpha\beta_1\le 1,\\ \rho, agar\, \alpha\beta_1>1;\end{cases} \qquad (2)$$

$\rho\left(\alpha\beta_1>1\, bo'lganda\right)\rho=(\beta-\alpha\rho)$ tenglikning $(0{,}1)$ ga qarashli yagona ildizi. Bundan tashqari

$$\pi_1=\int_0^\infty t d\Pi(t)=\begin{cases}\dfrac{\beta_1}{1-\alpha\beta_1}, agar\, \alpha\beta_1<1;\\ +\infty, agar\, \alpha\beta_1\ge 1;\end{cases} \qquad (3)$$

2-teorema. Agar $B(t)=1-e^{-bt}, b>0$ bo'lsa, u holda

$$\pi(s)=\frac{b[1-\gamma(s)]}{s+b[1-\gamma(s)]}$$

$$\gamma(s)=\alpha(s+b-b\gamma(s)), \qquad (4)$$

tengliklar o'rinli bo'lib, bu tengliklar $Res>0$ yarim tekislikda ¿$\gamma(s)\vee$¿1 va , ¿$\pi(s)\vee$¿1 shartlarni qanoatlantiruvchi

$$\pi(s)=\int_0^\infty e^{-st}d\Pi(t), \qquad (\Pi(t)-kamaymovchi\, funksiya)$$

ko'rinishda ifodalanuvchi yagona $\pi(s)$, $\gamma(s)$ analitik juftlikni aniqlaydi.

Bunda

$$\Pi(+0)=0$$

$$(5)$$

$$\Pi(+\infty)=min(1, a_1 b).$$

Bundan tashqari

$$\pi_1=\begin{cases}\dfrac{b^{-1}}{1-\sigma}, agar\, a_1 b>1\\ +\infty, agar\, a_1 b\le 1\end{cases}$$

bu yerda $\sigma\ (a, b>1 b\, o' lganda)\ \sigma=a(b-a\sigma)$ tenglamaning $(0{,}1)$ ga tegishli yagona ildizi.

Izoh. $\Pi(+\infty)<1$ bo'lgan hol shuni anglatadiki, bandlik davri cheksiz qiymatni qabul qilishi mumkin (ya'ni sistema hech qachon bandlikdan xalos bo'lolmaydi) va uning ehtimoli $1-\Pi(+\infty)>0$ ga teng.

1-teoremani isbotlashdan oldin quyidagi keltiriladigan mulohazalar yordamida isbotlanadigan

$$\Pi(t)=\sum_{n\ge 0}\int_0^t \frac{(au)^n}{n!}e^{-au}\Pi_n(t-u)\,dB(u),$$

(6)

$$\Pi_n(t)=¿$$

formulaning o'rinli ekanligiga e'tiborimiz qaratamiz.

Faraz qilaylik, xizmat ko'rsatish tarmog'i iniversal bo'lsin, ya'ni chaqiriqlarni xizmatga abuk qilish tartibiga bog'liq bo'lmain. Bu xizmat ko'rsatilishi kutilayotgan chaqiruvlardan oxirgisini qabul etilishini anglatadi. Ko'rinib turibdiki, xizmat ko'rsatishning bunday tartibi sistemaning bandlik davriga ta'sir ko'rsatmaydi.

Bandlik davrining boshlanishida sistemada bitta chaqiruv mavjud bo'lsin.Faraz qilaylik, unga xizmat ko'rsatish vaqti $u(\le t)$ bo'lsin. Bu vaqt oralig'ida sistemaga $\frac{(au)^n}{n!}e^{-au}$ ehtimol bilan n ta chaqiruv kelishi mumkin. Sistemaning qolgan bandlik vaqti n ta bandlik davrlarining yig'indisiga teng bo'ladi.(va $ut-u$ da oshmasligi kerak) . Laplas-Stiltes almashtirishlaridan (6) formula quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\pi(s)=s\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t\sum_{n\ge 0}\frac{(au)^n}{n!}e^{-au}\Pi_n(t-u)\,dB(u)=¿$$

$$¿\, s\int_0^\infty dB(u)\int_u^\infty\sum_{n\ge 0}\frac{(au)^n}{n!}e^{-au}\Pi_n(t-u)e^{-st}dt=¿$$

$$¿\, s\int_0^{\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{(au)^n}{n!}e^{-au}e^{-su}dB(u)\int_0^{\infty}e^{-sv}\Pi_n(v)dv=¿$$

$$¿\int_0^{\infty}\sum_{n\geq 0}\frac{(au)^n}{n!}e^{-au}e^{-su}[\pi(s)]^n dB(u)=\int_0^{\infty}e^{-(s+a-a\pi(s))u}dB(u),$$

Bundan esa (1) kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, s kompleks son $Res>0$ shartni qanoatlantirsin.

$$z=\beta(s+a-az) \qquad (7)$$

tenglamani qaraymiz. (7) ning chap va o'ng tomonlari $¿ z \vee \leq 1$ doirani o'zida saqlovchi sohada (masalan, $\Re(s+a-az)>0$, ya'ni $Rez<1+a^{-1}$ sohada) $z$bo'yicha analitik bo'ladi. B undan tashqari $|z|=1$ bo'lganda

$$\Re(s+a-az)=Res+a(1-Rez)>0.$$

Shuning uchun

$$|\beta(s+a-az)|\leq\beta(\Re(s+a-az))<1=|z|,$$

bu yerdan Rushe teoremasiga ko'ra, $z\,va\,z-\beta(s+a-az)$ funksiyalar $¿ z \vee \leq 1$ doirada bir xil sondagi nollarga ega bo'ladi. Shunday qilib, (2.2.7) tenglama, $Res>0$ ni qanoatlantiruvchi har bir s uchun $¿\pi(s) \vee \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi yagona $z=\pi(s)$ funksiyani aniqlaydi. O shkormas funksiya haqidagi teorema yordamida tekshirish mumkinki, $\pi(s)$ funksiya $Res>0$ yarim tekislikda analitik funksiya bo'ladi.

Boxner-Xinchin teoremasi yordamida $\pi(s)$ funksiyani biror monoton kamaymovchi $\Pi(t)$ funksiyaning Laplas-Stiltes almashtirishi yordamida tasvirlash mumkinligini isbotlash mumkin.

$$\lim_{t\to 0}\Pi(t)$$

limit mavjud bo;lgani uchun

$$\Pi(+0)=\pi(+\infty)$$

yoki (1) ga ko'ra $¿\pi(s) \vee \leq 1$, $\beta(+\infty)=\beta(0)$ bo'lgani uchun

$$\Pi(+0)=\beta(0)$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Xuddi shunday, chekli yoki cheksiz

$$\lim_{t\to 0} \Pi(t)=\Pi(+\infty)$$

limit mavjud bo'lgani uchun

$$\Pi(+\infty)=\pi(+0) \tag{8}$$

Tenglik bajarilishini ko'rsatish mumkin. Bu yerda

$$\pi(+0)=\beta(\alpha-\alpha\pi(+0)) \tag{9}$$

bo'lib, $Res>0$ yarim tekislikda $0\leq\pi(+0)\leq\Pi(+\infty)=\pi(+0)$ va $¿\pi(s)\vee\leq 1$ bo'lgani uchun $\pi(s)-0\leq\pi(+0)\leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy son bo'ladi.

Endi $\alpha\beta_1<1$ bo'lganda

$$x=\beta(\alpha-\alpha x) \tag{10}$$

tenglama $[0,1]$ da yagona $x_1=1$ yechimga, $\alpha\beta_1>1$ bo'lganda esa $x_0=\rho$, $x_1=1$, $(0<\rho<1)$ yechimgs ega ekanligini ko'rsatamiz.

(10) ning chap va o'ng tomonlarini grafik ravishda tasvirlaymiz. $\beta(\alpha-\alpha x)$ funksiya grafigining qavariqligi pastga yo'nalganligi uchun (0,1) da nolning mavjudligi masalasi $\beta(\alpha-\alpha x)$ funksiyaning $x=1-0$ nuqtadagi holatini tekshirishga keltiriladi. Uning bu nuqtadagi hosilasi $\alpha\beta_1$ ga teng. Agar $\alpha\beta_1>1$ bo'lsa u holda (10) ning $(0,1)$ ga tegishli yagona ildizi mavjud; agar $\alpha\beta_1\leq 1$ bo'lsa, u holda (10) tenglama $(0,1)$ da yechimga ega emas. Shuni qayd etish kerakki, kompleks tekislikning $¿x\vee\leq 1$ yopiq doirasida tenglama topilgan ildizlar bilan bir xil bo'lgan faqat haqiqiy ildizlarga ega bo'lar ekan.

Shunday qilib, $\alpha\beta_1\leq 1$ bo'lganda $\pi(+0)=1$. $\alpha\beta_1>1$ bo'lganda $\pi(+0)$ uchun ikkita hol bo'lishi mumkin: $\pi(+0)=1$va $\pi(+0)=\rho<1$. Aslida esa $\pi(+0)=\rho$ bo'ladi. Bu tasdiq ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\pi(\varepsilon)$ ildiz $\pi(\varepsilon)=\beta(\varepsilon+\alpha-\alpha\pi(\varepsilon))$ tenglamaning $\pi(\varepsilon)<1$ shartni qanoatlantiruvchi yagona ildiz ekanligidan bevosita kelib chiqadi.

Teorema isbotini yakunlash uchun

$$\pi_1=\int_0^\infty t d\,\Pi(t)=¿\pi'(+0)¿$$

tenglikni e'tiborga olish yetarli.

2-teoremaning isboti. Qandaydir chaqiriqning kelishi bilan xizmat boshlanadigan sistemaga ushbu xizmat davomida k ta $(k\geq 0)$ chaqiriqlar kelgan holda sistemaning ushbu chaqiriqlardan ozod bo'lish vaqtigach bo'lgan vaqt oralig'ining uzunligini ς_k deb belgilaymiz. Xizmat qilish vaqtining davomiyligi eksponensial taqsimotga ega ekanligi munosabati bilan ς_k, $k\geq 1$ bo'lgan holda, ungacha qancha vaqt xizmat ko'rsatilganidan bog'liq emas. Ma'lumki, ς_0 sistemaning bandlik davridir. Shartli ravishda

$$\Pi_k(t)=P\{\varsigma_k\leq t\},\overline{\Pi}_k(t)=1-\Pi_k(t),k\geq 0.$$

$$\overline{\Pi}_k(t)=[1-A(t)]\left[e^{-bt}+\frac{bt}{1!}e^{-bt}+\ldots+\frac{(bt)^k}{k!}e^{-bt}\right]+¿$$

$$+\int_0^t\left[e^{-bu}\overline{\Pi}_{k-1}(t-u)+\frac{bu}{1!}e^{-bu}\overline{\Pi}_k(t-u)+\ldots+\frac{(bu)^k}{k!}e^{-bu}\overline{\Pi}_1(t-u)\right]dA(u),k\geq 0\,(2.2.11)$$

tengliklar quyidagi mulohazalar asosida olinishi mumkin. Bandlik davri $\varsigma_k>t$ bo'lishi uchun quyidagi hollardan birining bajarilishi zarur va yetarli bo'ladi:

1) t vaqt davomida chaqiriqlar tushmaydi hamda bu vaqt oralig'ida k dan ko'p bo'lmagan chaqiriqlarga xizmat ko'rsatiladi;

2) birinchi chaqiriq $u\leq t$ vaqtda kelib tushadi va asbob i ta chaqiriqlarga $i=(0,1,2,\ldots,k)$ xizmat qiladi. Shundan so'ng $(k+1-i)$ inchi chaqiriqning xizmati bilan boshlanayotgan bandlik davri $(t-u)$ dan katta bo'lmaydi.

Faraz qilaylik,

$$\begin{cases} \overline{R}(z,t)=\sum_{k\geq 0} z^k\overline{\Pi}_k(t); \\ R(z,t)=\sum_{k\geq 0} z^k\Pi_k(t)=(1-z)^{-1}-\overline{R}(z,t) \\ \overline{r}(z,s)=\int_0^\infty e^{-st}d_t\overline{R}(z,t); \\ r(z,s)=\int_0^\infty e^{-st}d_tR(z,t)=(1-z)^{-1}-\overline{r}(z,t); \end{cases} \quad (12)$$

(11) ning chap va o'ng qismlarini z^{k+1} ga ko'paytirib , k bo'yicha 0 dan $+\infty$ gacha yig'ib chiqib, quyidagini olamiz.

$$z\overline{R}(z,t)=[1-A(t)]\frac{z}{1-z}e^{-bt(1-z)}+¿$$

$$+\int_{0}^{\infty} e^{-bt(1-z)}[\overline{R}(z,t-u)\text{¿}-\overline{R}(0,t-u)dA(u)],\text{¿}$$

bundan Laplas-Stiltes almashtirishiga o’tsak,

$$z\bar{r}(z,s)=\frac{z}{1-z}\frac{s}{s+b-bz}[1-\alpha(s+b-bz)]+\text{¿}$$

$$+\alpha(s+b-bz)[\bar{r}(z,s)-\bar{r}(0,s)],$$

$$\bar{r}(z,s)[z-\alpha(s+b-bz)]=\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{z}{1-z}\frac{s}{s+b-bz}[1-\alpha(s+b-bz)]-\text{¿}$$

$$-\alpha(s+b-bz)\vec{r}(0,s).(13)$$

tenglik hosil bo’ladi.

1-teoremaning isboti kabi, funksional tenglamani quyidagi ko’rinishda izlaymiz:

$$\gamma(s)=\alpha(s+b-b\gamma(s)).$$

Bu tenglamaning yagona yechimi quyidagicha bo’ladi:

$$\gamma(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st}dC(t),$$

bu yerda $C(t)-\text{¿}$kamaymaydigan funksiya bo’lib, bunda

$$C(+0)=\gamma(+\infty)=A(0);$$

$$C(+\infty)=\gamma(+0)=\begin{cases}1, agar\ a_1 b>1\\ \sigma, agar\ a_1 b\leq 1\end{cases}$$

bu yerda σ ($a_1 b>1$ bo’lganda) $\sigma=\alpha(b-b\sigma)$ tenglamaning $(0{,}1)$ oraliqda yotuvchi yagona ildizidir. $z=\gamma(s)$ da (2.2.13) munosabatdan

$$\bar{r}(0,s)=\frac{s}{s+b-b\gamma(s)}(14)$$

va bundan

$$\pi(s)=r(0,s)=1-\bar{r}(0,s)=\frac{b[1-\gamma(s)]}{s+b[1-\gamma(s)]}$$

tenglikka ega bo’lamiz. Bu yerda

$$\pi(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\, d\Pi(t),$$

$\Pi(t)-¿$kamaymovchi funksiyaligidan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

$$\pi(s)=\frac{\frac{b}{s}\left[1-\gamma(s)\right]}{1+\frac{b}{s}\left[1-\gamma(s)\right]},$$

$\frac{b}{s}\left[1-\gamma(s)\right]$ funksiya

$$b\int_0^{t}\left[1-C(u)\right]du.$$

funksiyaning Laplas- Stiltes almashtirishidir.

2-teoremaning qolgan tasdig'i odatdagicha tekshiriladi.

Haqiqatan ham, biz bir muncha katta qiymat oldik, ya'ni

$$\bar{r}(z,s)=\left[z-\alpha(s+b-bz)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left\{z\frac{1-\alpha(s+b-bz)}{1-z}\frac{s}{s+b-bz}-\alpha(s+b-bz)\frac{s}{s+b-b\gamma(s)}\right\}.(15)$$

Bir nechta misollar ko'rib chiqamiz.

$$\int_0^{\infty} t\,dB(t)<\int_0^{\infty} t\,dA(t)<+\infty$$

deb faraz qilaylik.

1-misol. $A(t)=1-e^{\alpha t}$, $\alpha>0$. bandlik davrining birinchi va ikkinchi tartibli momentlari

$$\pi_1=\frac{\beta_1}{1-\alpha\beta_1},$$

$$\pi_2=\frac{\beta_2}{(1-\alpha\beta_1)^3}$$

bo'ladi.

2-misol. $A(t)=1-e^{\alpha t}$ **,** $B(t)=1-e^{bt}$. (1.2.1) dan

$$\pi(s)=\frac{b}{s+b+a-a\pi(s)},$$

ni olamiz, bundan

$$\pi(s)=\frac{s+b+a-\sqrt{(s+b+a)^2-4ab}}{2a}$$

“ $-¿$ ”ishorani olamiz, chunki $¿\pi(s)\vee\leq 1¿$.

Bandlik davrining darslabki to’rtta momentlari

$$\pi_1=(b-a)^{-1},$$

$$\pi_2=2b(b-a)^{-3},$$

$$\pi_3=6b(a+b)(b-a)^{-5}$$

$$\pi_4=24b\left(a^2+3ab+b^2\right)(b-a)^{-7};$$

va bandlik davri dispersiyasi $\pi_2-\pi_1{}^2=(a+b)(b-a)^{-3}$ bo'ladi

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Боровков А.А. Асимптотические методф теории массового обслуживания. – М.; Наука, 1980.
2. Висков О.В., Исмоилов А.И. Система массового обслуживания с ограниченной очередью, Исследования по математической статистике и смежные вопросы, науч. Труды. ТашГУ, вып. 402, 1972, 17-29, 28-31.
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н., Лекции по теории массового обслуживания, изд-во КВИРТУ, 1974.
4. F.O.Husanov. Ommaviy xizmat ko‘rsatish tarmoqlarining matematik modeli va asosiy xarakteristikalari. International Journal of Economy and Innovation | Volume 33 | Gospodarka i Innowacje ISSN: 2545-0573. 290-293 b.