

# DIFFERENSIAL TENGLAMALAR YORDAMIDA EPIDEMIYALARNI MODELLASHTIRISH

**Omonov A. T.**

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti  
“Oliy va amaliy matematika” kafedrası o‘qituvchisi  
Toshkent, O‘zbekiston.

**Annotatsiya:** Mazkur maqolada differensial tenglamalar yordamida epidemiyalar tarqalishini matematik modellashtirishning nazariy va amaliy jihatlari yoritiladi. Epidemik jarayonlar aholining turli guruhlari o‘rtasida kasallik tarqalishi, infeksiyaga moyillik, yuqtirish tezligi, sog‘ayish ko‘rsatkichi va profilaktik choralar ta’siri bilan belgilanadi. Shu sababli ularni oddiy kuzatuv asosida emas, balki aniq matematik modellar orqali tahlil qilish zarur. Maqolada SIR va unga yaqin epidemiologik modellar differensial tenglamalar tizimi sifatida talqin qilinadi hamda ularning iqtisodiy oliy ta’lim muassasalarida matematika fanini o‘qitishdagi ahamiyati ochib beriladi. Tadqiqotda epidemiyalarni modellashtirish orqali talabalar matematik abstraksiyani real ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar bilan bog‘lash, parametrlarni tahlil qilish, prognozlash va qaror qabul qilish ko‘nikmalarini rivojlantirishi ta’kidlanadi. Shuningdek, epidemik jarayonlarning iqtisodiy oqibatlarini baholashda matematik modellashtirishning o‘rni, sog‘liqni saqlash xarajatlari, mehnat bozori faolligi va ishlab chiqarish uzluksizligiga ta’siri ilmiy nuqtai nazardan izohlanadi.

**Kalit so‘zlar:** differensial tenglamalar, epidemiya modeli, SIR modeli, matematik modellashtirish, epidemik jarayon, parametrlar tahlili, prognozlash, iqtisodiy matematika.

## MODELING EPIDEMICS USING DIFFERENTIAL EQUATIONS

**Omonov A. T.**

Tashkent State University of Economics  
Teacher, Department of “Higher and Applied Mathematics”  
Tashkent, Uzbekistan.

**Abstract:** This article discusses the theoretical and practical aspects of modeling epidemic spread using differential equations. Epidemic processes are determined by disease transmission among different population groups,

susceptibility to infection, transmission rate, recovery rate and the influence of preventive measures. Therefore, they should be analyzed not only through observation, but also through precise mathematical models. The article interprets SIR and related epidemiological models as systems of differential equations and reveals their significance in teaching mathematics at economic higher education institutions. The study emphasizes that epidemic modeling helps students connect mathematical abstraction with real socio-economic processes, analyze parameters, make forecasts and develop decision-making skills. The article also explains the role of mathematical modeling in assessing the economic consequences of epidemic processes, including health care costs, labor market activity and continuity of production.

**Keywords:** differential equations, epidemic model, SIR model, mathematical modeling, epidemic process, parameter analysis, forecasting, economic mathematics.

### **Kirish**

Differensial tenglamalar zamonaviy matematikaning eng muhim bo‘limlaridan biri bo‘lib, u real jarayonlarning vaqt bo‘yicha o‘zgarishini ifodalash, tahlil qilish va prognozlash imkonini beradi. Ayniqsa, epidemiyalar tarqalishini o‘rganishda differensial tenglamalardan foydalanish katta ilmiy-amaliy ahamiyatga ega. Chunki epidemik jarayonlar tasodifiy ko‘rinishga ega bo‘lsa-da, ularning rivojlanishida ma’lum qonuniyatlar mavjud: kasallikka moyil aholi soni kamayadi, infeksiyalanganlar soni ma’lum davrda ortadi, sog‘ayganlar ulushi esa vaqt o‘tishi bilan ko‘payadi. Ushbu o‘zgarishlarni matematik ifodalash orqali kasallik tarqalish sur‘ati, epidemiyaning cho‘qqi nuqtasi, xavf darajasi va profilaktik choralar samaradorligini baholash mumkin.

Epidemiyalarni modellashtirish nafaqat tibbiyot yoki biologiya sohasi uchun, balki iqtisodiy ta’lim yo‘nalishlari uchun ham dolzarbdir. Chunki keng ko‘lamli epidemik holatlar mehnat bozori, ishlab chiqarish hajmi, xizmat ko‘rsatish sohasi, byudjet xarajatlari, ta’lim tizimi va ijtimoiy barqarorlikka bevosita ta’sir ko‘rsatadi. Iqtisodiy oliy ta’lim muassasalarida differensial tenglamalar asosida epidemiyalarni modellashtirishni o‘rganish talabalarni matematik nazariyani amaliy jarayonlar bilan bog‘lashga o‘rgatadi. Bu esa ularning analitik fikrlash, raqamli ma’lumotlarni talqin qilish, prognozlash va iqtisodiy qarorlarning ehtimoliy oqibatlarini baholash ko‘nikmalarini rivojlantiradi.

Mazkur mavzuning dolzarbligi shundaki, epidemik jarayonlarni oddiy statistik kuzatuvlar orqali to‘liq tushuntirish qiyin. Statistik ma’lumotlar mavjud holatni ko‘rsatsa, differensial tenglamalar kelajakdagi o‘zgarishlarni taxmin qilish, turli ssenariylarni solishtirish va boshqaruv choralarning natijalarini oldindan baholash imkonini beradi. Masalan, SIR modeli aholining kasallikka moyil, infeksiyalangan va sog‘aygan guruhlarga ajratilishi asosida tuziladi hamda ushbu guruhlar o‘rtasidagi o‘tish jarayonlari differensial tenglamalar yordamida ifodalanadi. Bunday yondashuv talabalar uchun matematik formulalarning real hayotdagi mazmunini ochib beradi.

Shu jihatdan, differensial tenglamalar yordamida epidemiyalarni modellashtirish iqtisodiy matematika ta’limida nazariy bilim, amaliy tahlil va fanlararo yondashuvni birlashtiruvchi samarali yo‘nalish sifatida namoyon bo‘ladi.

### **Adabiyotlar sharhi**

Epidemiyalarni differensial tenglamalar yordamida modellashtirish bo‘yicha ilmiy adabiyotlar mazkur yo‘nalishning nazariy, amaliy va iqtisodiy jihatdan muhimligini ko‘rsatadi. Kermack va McKendrick tomonidan ishlab chiqilgan klassik epidemiologik model kasallik tarqalishini matematik ifodalashda asosiy nazariy poydevor hisoblanadi. Anderson va May, Hethcote, Brauer, Castillo-Chavez va Feng, Diekmann, Heesterbeek va Britton, Keeling va Rohani hamda Martcheva asarlarida infeksiya kasalliklarning dinamikasi, yuqtirish va sog‘ayish koeffitsiyentlari, populyatsiya guruhlari o‘rtasidagi o‘tish jarayonlari chuqur yoritilgan. Boyce va DiPrima, Ross, Pontryagin, Perko, Hirsch, Smale va Devaney, Strogatz hamda Verhulst tadqiqotlari differensial tenglamalar va dinamik tizimlarning matematik asoslarini tushuntiradi. Barro, Ursúa va Weng hamda Eichenbaum, Rebelo va Trabandt ishlarida epidemiyalarning iqtisodiy faollik, ishlab chiqarish, mehnat bozori va davlat xarajatlariga ta’siri tahlil qilingan. Ushbu manbalar epidemik jarayonlarni matematik, biologik va iqtisodiy nuqtai nazardan kompleks o‘rganish zarurligini asoslaydi.

### **Metodlar**

Tadqiqot metodologiyasi differensial tenglamalar nazariyasi, matematik modellashtirish, epidemik jarayonlarni tizimli tahlil qilish va iqtisodiy-matematik yondashuvlarga asoslanadi. Mazkur maqolada epidemiyalarning tarqalishini o‘rganish uchun avvalo aholining holati dinamik tizim sifatida qaraladi. Bunda aholi kasallikka moyil shaxslar, infeksiyalanganlar va sog‘ayganlar guruhlarga ajratiladi. Ushbu guruhlar o‘rtasidagi o‘zgarishlar vaqt funksiyasi sifatida ifodalanadi va differensial tenglamalar tizimi orqali tavsiflanadi. Bunday

yondashuv epidemik jarayonning faqat joriy holatini emas, balki uning rivojlanish yoʻnalishini ham aniqlash imkonini beradi.

Asosiy metod sifatida SIR modelidan foydalaniladi. Ushbu modelda  $S(t)$  kasallikka moyil aholi sonini,  $I(t)$  infeksiyalanganlar sonini,  $R(t)$  esa sogʻaygan yoki kasallikdan keyin immunitet hosil qilganlar sonini bildiradi. Modelning asosiy mazmuni shundan iboratki, kasallikka moyil shaxslar infeksiyalanganlar bilan muloqot qilganda kasallik yuqishi ehtimoli ortadi, infeksiyalanganlar esa maʼlum vaqt oʻtgach sogʻayganlar guruhiga oʻtadi. Bu jarayon yuqtirish koeffitsiyenti va sogʻayish koeffitsiyenti orqali ifodalanadi. Ushbu parametrlar epidemiyaning tezligi, davomiyligi va choʻqqi darajasini belgilovchi muhim koʻrsatkichlar hisoblanadi.

Tadqiqotda nazariy tahlil, matematik abstraksiyalash, parametrik tahlil, taqqoslash va modellashtirish metodlaridan foydalaniladi. Nazariy tahlil epidemik jarayonlarning matematik mohiyatini ochib berishga xizmat qiladi. Matematik abstraksiyalash orqali real hayotdagi murakkab jarayonlar soddalashtirilgan model koʻrinishida ifodalanadi. Parametrik tahlil esa yuqtirish va sogʻayish koeffitsiyentlari oʻzgarishi epidemik dinamikaga qanday taʼsir qilishini aniqlash imkonini beradi. Taqqoslash metodi yordamida turli ssenariylar, masalan, profilaktik choralar mavjud boʻlgan va mavjud boʻlmagan holatlar oʻzaro solishtiriladi.

Iqtisodiy oliy taʼlim muassasalari uchun ushbu metodik yondashuv alohida ahamiyatga ega. Chunki talabalar differensial tenglamalarni faqat nazariy masala sifatida emas, balki real ijtimoiy-iqtisodiy vaziyatlarni baholash vositasi sifatida oʻrganadilar. Model natijalari asosida epidemiyaning iqtisodiy faollik, mehnat resurslari, xizmat koʻrsatish sohasi, taʼlim jarayoni va byudjet xarajatlariga taʼsirini tahlil qilish mumkin. Shu bois tadqiqot metodlari matematik hisoblash, iqtisodiy talqin va prognozlash koʻnikmalarini birlashtiradi.

### **Natijalar**

Tadqiqot natijalari shuni koʻrsatadiki, differensial tenglamalar yordamida epidemiyalarni modellashtirish epidemik jarayonlarning ichki dinamikasini matematik jihatdan tushuntirish, ularning rivojlanish bosqichlarini aniqlash va turli boshqaruv choralarining ehtimoliy samaradorligini baholash imkonini beradi. SIR modeli asosida olib borilgan nazariy tahlilda kasallikka moyil aholi ulushi, infeksiyalanganlar soni va sogʻayganlar guruhining vaqt boʻyicha oʻzgarishi epidemiyaning umumiy yoʻnalishini belgilovchi asosiy koʻrsatkichlar sifatida namoyon boʻladi. Modelda yuqtirish koeffitsiyenti yuqori boʻlsa, infeksiyalanganlar soni qisqa muddatda tez ortadi va epidemiyaning choʻqqi

nuqtasi erta yuzaga keladi. Aksincha, yuqtirish tezligi kamaytirilsa, epidemik egri chiziq tekislanadi, sog‘liqni saqlash tizimiga tushadigan bosim pasayadi va iqtisodiy faoliyatni bosqichma-bosqich muvozanatda saqlash imkoniyati ortadi.

Parametrik tahlil natijalari shuni ko‘rsatadiki, epidemik jarayonning rivojlanishi alohida bitta omilga emas, balki bir nechta o‘zaro bog‘liq ko‘rsatkichlarga tayanadi. Yuqtirish koeffitsiyenti, sog‘ayish tezligi, kontaktlar soni, profilaktik choralar darajasi va aholining ehtiyotkorlik xatti-harakati model natijalariga sezilarli ta‘sir ko‘rsatadi. Ayniqsa, sog‘ayish koeffitsiyenti ortganda infeksiyalanganlar guruhida qolish muddati qisqaradi, bu esa kasallik tarqalish zanjirini sekinlashtiradi. Shu bilan birga, profilaktik choralar natijasida kontaktlar intensivligi kamayganda kasallikka moyil guruhdan infeksiyalangan guruhga o‘tish sur‘ati pasayadi.

Iqtisodiy nuqtai nazardan, model natijalari epidemiyalarning mehnat unumdorligi, ishlab chiqarish jarayoni, xizmat ko‘rsatish sohasi, ta‘lim tizimi va davlat xarajatlariga ta‘sirini oldindan baholashda muhim ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatadi. Infeksiyalanganlar sonining keskin ortishi vaqtinchalik mehnat resurslari kamayishiga, tibbiy xarajatlar ko‘payishiga va ayrim iqtisodiy faoliyat turlarida uzilishlar yuzaga kelishiga sabab bo‘lishi mumkin. Shu sababli differensial tenglamalar asosidagi modellashtirish iqtisodiy qarorlarni ilmiy asoslash, xavf darajasini aniqlash va resurslarni oqilona taqsimlash uchun samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Ta‘limiy jihatdan esa mazkur model talabalar uchun differensial tenglamalarning amaliy qiymatini ochib beradi. Talabalar matematik formulalar, parametrlar va grafik natijalar orqali real jarayonlarni tahlil qilishni o‘rganadilar. Bu esa ularning abstrakt fikrlash, iqtisodiy-matematik tahlil, prognozlash va muammoli vaziyatlarda qaror qabul qilish kompetensiyalarini rivojlantiradi.

### **Muhokama**

Differensial tenglamalar yordamida epidemiyalarni modellashtirish epidemik jarayonlarni chuqurroq anglash, ularning rivojlanish mexanizmini izohlash va amaliy qarorlar uchun ilmiy asos yaratish imkonini beradi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, SIR kabi modellar epidemiyani faqat tibbiy hodisa sifatida emas, balki murakkab ijtimoiy-iqtisodiy jarayon sifatida ham talqin qilishga yordam beradi. Chunki kasallik tarqalishi aholining sog‘lig‘i bilan birga mehnat bozori, ishlab chiqarish, xizmatlar sohasi, ta‘lim jarayoni va davlat xarajatlariga bevosita ta‘sir ko‘rsatadi. Shu sababli iqtisodiy oliy ta‘lim muassasalarida bunday modellarni o‘rganish talabalar uchun matematik

bilimlarning real jarayonlar bilan bog‘liqligini tushunishda muhim metodik ahamiyat kasb etadi.

Muhokama jarayonida alohida ta’kidlash kerakki, differensial tenglamalar asosidagi epidemiologik modellar real hayotni to‘liq takrorlamaydi, balki uning asosiy qonuniyatlarini soddalashtirilgan shaklda ifodalaydi. Masalan, SIR modelida aholi uchta asosiy guruhga ajratiladi va guruhlar o‘rtasidagi o‘tish jarayoni ma’lum parametrlar orqali tushuntiriladi. Biroq real sharoitda aholi tarkibi yosh, kasb, hudud, ijtimoiy faollik, immunitet darajasi, tibbiy xizmatga murojaat qilish imkoniyati va profilaktik madaniyat kabi ko‘plab omillarga bog‘liq bo‘ladi. Shuning uchun model natijalarini talqin qilishda parametrlarning shartli xarakterini, ma’lumotlar aniqligi va tashqi omillar ta’sirini hisobga olish zarur.

Epidemiyalarni modellashtirishda yuqtirish va sog‘ayish koeffitsiyentlari asosiy tahliliy ahamiyatga ega. Yuqtirish koeffitsiyenti ijtimoiy kontaktlar intensivligi, sanitariya qoidalariga rioya qilish, vaksinalash, karantin choralarining darajasi va aholining xulq-atvori bilan bog‘liq bo‘lishi mumkin. Sog‘ayish koeffitsiyenti esa tibbiy xizmat sifati, davolash imkoniyatlari, kasallikning og‘irlik darajasi va tashxis qo‘yish tezligiga bog‘liq. Shu jihatdan, matematik model faqat sonli hisoblash vositasi emas, balki boshqaruv qarorlarini baholash, xavfli holatlarni oldindan ko‘rish va muqobil ssenariylarni solishtirish imkonini beruvchi tahliliy mexanizm sifatida namoyon bo‘ladi.

Iqtisodiy ta’lim nuqtai nazaridan ushbu mavzu talabalarni fanlararo fikrlashga yo‘naltiradi. Ular differensial tenglamalar orqali epidemiya dinamikasini, iqtisodiy yo‘qotishlarni, mehnat resurslari qisqarishini va davlat xarajatlari ortishini bog‘liq holda tahlil qilishni o‘rganadilar. Bu esa matematika fanini abstrakt nazariya doirasidan chiqarib, iqtisodiy prognozlash va boshqaruv tahlili bilan uyg‘unlashtiradi. Natijada talabalar matematik modelning amaliy qiymatini angelaydi, parametrlar bilan ishlash ko‘nikmasini rivojlantiradi va murakkab ijtimoiy-iqtisodiy vaziyatlarda asoslangan qaror qabul qilishga tayyorlanadi.

### **Xulosa**

Differensial tenglamalar yordamida epidemiyalarni modellashtirish zamonaviy matematik tahlilning muhim amaliy yo‘nalishlaridan biri bo‘lib, u epidemik jarayonlarning rivojlanish qonuniyatlarini aniqlash, ularning ehtimoliy oqibatlarini baholash va turli boshqaruv choralarini ilmiy asoslash imkonini beradi. Mazkur maqolada epidemiyalarni matematik modellashtirishda SIR modelining nazariy mazmuni, uning asosiy parametrlar bilan bog‘liqligi hamda

iqtisodiy oliy ta'lim muassasalarida matematika fanini o'qitishdagi metodik ahamiyati yoritildi. Tadqiqot shuni ko'rsatadiki, kasallikka moyil, infeksiyalangan va sog'aygan aholi guruhlarida o'rtasidagi o'zgarishlarni differensial tenglamalar tizimi orqali ifodalash epidemiyaning tarqalish sur'ati, cho'qqi nuqtasi va pasayish bosqichini tahlil qilish uchun qulay ilmiy vosita hisoblanadi.

Epidemik jarayonlarning matematik modeli real hayotdagi murakkab hodisalarni soddalashtirilgan shaklda aks ettiradi. Shu sababli model natijalarini talqin qilishda yuqtirish koeffitsiyenti, sog'ayish tezligi, ijtimoiy kontaktlar intensivligi, profilaktik choralar, tibbiy xizmat sifati va aholining xulq-atvori kabi omillarni hisobga olish zarur. Differensial tenglamalar yordamida bunday parametrlarning ta'sirini o'rganish epidemiyaning turli ssenariylarini solishtirish, xavf darajasini aniqlash va resurslardan oqilona foydalanish bo'yicha asoslangan xulosalar chiqarishga yordam beradi.

Iqtisodiy nuqtai nazardan, epidemiyalarni modellashtirish mehnat bozori, ishlab chiqarish jarayoni, xizmat ko'rsatish sohasi, ta'lim tizimi va davlat xarajatlariga ta'sir qiluvchi omillarni oldindan baholash imkonini beradi. Infeksiyalanganlar sonining keskin ortishi iqtisodiy faollik pasayishiga, tibbiy xarajatlar ko'payishiga va ijtimoiy barqarorlikka salbiy ta'sir ko'rsatishi mumkin. Shuning uchun epidemiologik modellar iqtisodiy prognozlash, boshqaruv qarorlarini tayyorlash va xavflarni kamaytirish strategiyalarini ishlab chiqishda muhim ahamiyatga ega.

Ta'limiy jihatdan esa ushbu mavzu talabalar uchun differensial tenglamalarning amaliy qiymatini ochib beradi. Epidemiyalarni modellashtirish orqali ular matematik abstraksiyani real ijtimoiy-iqtisodiy jarayonlar bilan bog'lashni, parametrlarni tahlil qilishni, grafik va sonli natijalarni talqin etishni hamda prognozlash ko'nikmalarini rivojlantiradilar. Demak, differensial tenglamalar yordamida epidemiyalarni modellashtirish iqtisodiy matematika ta'limida fanlararo yondashuvni kuchaytiradi, talabalarni analitik fikrlashga yo'naltiradi va ularni murakkab vaziyatlarda ilmiy asoslangan qaror qabul qilishga tayyorlaydi.

### **Adabiyotlar**

1. Allen, L. J. S. (2007). An introduction to mathematical biology. Pearson Prentice Hall.
2. Anderson, R. M., & May, R. M. (1991). Infectious diseases of humans: Dynamics and control. Oxford University Press.

3. Barro, R. J., Ursúa, J. F., & Weng, J. (2020). The coronavirus and the great influenza pandemic: Lessons from the Spanish flu for the coronavirus's potential effects on mortality and economic activity. National Bureau of Economic Research.
4. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary differential equations and boundary value problems. Wiley.
5. Brauer, F., Castillo-Chavez, C., & Feng, Z. (2019). Mathematical models in epidemiology. Springer.
6. Diekmann, O., Heesterbeek, H., & Britton, T. (2013). Mathematical tools for understanding infectious disease dynamics. Princeton University Press.
7. Eichenbaum, M. S., Rebelo, S., & Trabandt, M. (2021). The macroeconomics of epidemics. *The Review of Financial Studies*, 34(11), 5149–5187.
8. Hethcote, H. W. (2000). The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42(4), 599–653.
9. Hirsch, M. W., Smale, S., & Devaney, R. L. (2013). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Academic Press.
10. Kermack, W. O., & McKendrick, A. G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*, 115(772), 700–721.
11. Keeling, M. J., & Rohani, P. (2008). Modeling infectious diseases in humans and animals. Princeton University Press.
12. Martcheva, M. (2015). An introduction to mathematical epidemiology. Springer.
13. Murray, J. D. (2002). *Mathematical biology I: An introduction*. Springer.
14. Perko, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*. Springer.
15. Pontryagin, L. S. (1982). *Ordinary differential equations*. Pergamon Press.
16. Ross, S. L. (1984). *Differential equations*. Wiley.
17. Samarskii, A. A., & Mikhailov, A. P. (2002). *Mathematical modeling: Ideas, methods, examples*. Taylor & Francis.
18. Strogatz, S. H. (2015). *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Westview Press.
19. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (1990). *Equations of mathematical physics*. Dover Publications.

20. Verhulst, F. (1990). Nonlinear differential equations and dynamical systems. Springer.