УДК 517.978

Мирзамахмудов У.А., Ходжибаева И. В.,

ассистенты кафедры «Высшая математика»

Наманганский инженерно-технологический институт

Наманган, Узбекистан

ЗАДАЧА УБЕГАНИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЙ С УСКОРЕНИЕМ

Аннотация. В этой статье мы исследуем задачу убегания для дифференциальной игры второго порядка, когда начальные положения движущихся объектов линейно зависимы, а управления игроков имеют геометрические ограничения. Предложены новые достаточные условия для убегающего.

Ключевые слова. Дифференциальная игра, ускорение, геометрическое ограничение, убегающий, преследователь, исходные позиции, стратегия.

Mirzamahmudov U. A., Khodjibayeva I. V.,

assistants of the department « Higher mathematics»

Namangan institute of engineering and technology

Namangan, Uzbekistan

AN EVASION PROBLEM FOR MOVEMENTS WITH ACCELERATION

Annotation. In this paper, we study the evasion problem for the second order differential game when the initial positions of moving objects are linearly dependent and controls of the players have geometric constraints. Here the new sufficient solvability conditions for evader will be proposed.

Key words: Differential game, acceleration, geometric constraint, evader, pursuer, initial positions, strategy.

В управлении многих экономических и технических процессов требуется учесть конфликтность различных сторон. В сегодняшних сложных рыночных отношениях при решении многих экономических и технических задач теории дискретных и дифференциальных игр находят свои важные приложения. В настоящей работе рассматриваются движения объектов с ускорениями при геометрических ограничениях на управления. Получены новые достаточные условия для завершении игры, т.е. процесса в пользу убегающего объекта.

Пусть **P** и **E** объекты с противоположной целью заданы в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ и их движения на основе следующих дифференциальных уравнений и начальных условий

$$\mathbf{P}: \ddot{x} = u, \quad x_1 - kx_0 = 0, \quad |u| \le \alpha, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}: \ddot{y} = v, \quad y_1 - ky_0 = 0, \quad |v| \le \beta, \tag{2}$$

Где $x, y, u, v \in \boldsymbol{R}^n$; x- положение объекта P в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, $x_0 = x(0),\ x_1 = \dot{x}(0)$ - его начальное положение и скорость, соответственно, при $t = 0$; u- контролируемое ускорение преследователя, $u:[0,\infty) \to \boldsymbol{R}^n$ и оно выбирается как функция времени по отношению к t.Обозначим множество всех измеримых функций $u(\cdot)$, удовлетворяющих условию $|u| \le \alpha$, через $\boldsymbol{U}$. y - положение объекта E в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. $y_0 = y(0),\ y_1 = \dot{y}(0)$- его начальное положение и скорость соответственно в $t = 0$; v- контролируемое ускорение убегающего, $v:[0,\infty) \to \boldsymbol{R}^n$ и оно тоже выбирается как функция времени по отношению к t. Обозначим множество всех измеримых функций $v(\cdot)$, удовлетворяющих условию $|v| \le \beta$, через V.

Определение 1. Для тройки $(x_0, x_1, u(\cdot)), u(\cdot) \in \boldsymbol{U}$, следующее решение уравнения (1) называется траекторией преследователя на отрезке $t \ge 0$:

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t \int_0^s u(\tau) d\tau ds.$$

Определение 2. Для тройки $(y_0, y_1, v(\cdot)),\ v(\cdot) \in \boldsymbol{V}$, следующее решение уравнения (2) называется траекторией убегающего на отрезке $t \ge 0$:

$$y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t \int_0^s v(\tau) d\tau ds.$$

Определение 3. Для дифференциальной игры (1) - (2) задача убегания называется решённой, если существует такая управляющая функция убегающего $\exists v^*(\cdot) \in \boldsymbol{V}$ что для любой управляющей функции преследователя $\forall u(\cdot) \in \boldsymbol{U}$ и в некоторый конечный момент времени t^* выполняется равенство

$$x(t) \ne y(t), (t \ge 0) \qquad (3)$$

Для решения задачи убегания мы предложим следующую стратегию убегающего:

Определение 4. В дифференциальной игре (1) - (2) следующую функцию назовем стратегией убегающего:

$$v^*(t) = -\frac{z_0}{|z_0|}\beta, \quad t \ge 0, \qquad (4)$$ где $z_0 = x_0 - y_0 \ne 0.$

Теорема. Если выполнено одно из следующих условий:

1. $\alpha = \beta$ и $k \geq 0$; или 2. $\alpha < \beta$ и $k \in \left(-\sqrt{\dfrac{2(\beta-\alpha)}{|z_0|}}, +\infty \right)$,

тогда для дифференциальной игры (1) - (2) задачи убегания решаются стратегией убегающего (4), а функция перемены между объектами будет иметь следующий вид:

$$f(t,k,\alpha,\beta,|z_0|) = \begin{cases} |z_0|kt + |z_0|, & \alpha = \beta, \\ \dfrac{\beta-\alpha}{2}t^2 + |z_0|kt + |z_0|, & \alpha < \beta. \end{cases}$$

Доказательство. Предположим, пусть преследователь выбирает любую функцию управления $u(\cdot) \in \boldsymbol{U}$, а убегающий выбирает функцию управления (4). Тогда согласно (1) - (2) имеем следующие решения:

$$x(t) = x_0 + tx_1 + \int_0^t \int_0^s u(\tau)\, d\tau ds,$$

$$y(t) = y_0 + ty_1 + \int_0^t \int_0^s v^*(\tau)\, d\tau ds.$$

Напишем их функцию разности:

$$z(t) = x(t) - y(t) = z_0 + z_1 t + \int_0^t \int_0^s u(\tau) d\tau ds + \int_0^t \int_0^s \frac{z_0}{|z_0|} \beta d\tau ds,$$

где $z_1 = \dot{x}(0) - \dot{y}(0)$. Если мы вычтем начальные условия, мы получим отношение $z_1 = kz_0$. Отсюда имеем следующее равенство:

$$z(t) = z_0(kt+1) + \frac{z_0}{|z_0|}\beta\frac{t^2}{2} + \int_0^t \int_0^s u(\tau) d\tau ds$$

Оценим абсолютное значение этой функции снизу:

$$|z(t)| \geq \left| z_0(kt+1) + \frac{z_0}{|z_0|}\beta\frac{t^2}{2} \right| - \left| \int_0^t \int_0^s u(\tau)d\tau ds \right| \geq$$

$$\geq |z_0|(kt+1) + \beta\frac{t^2}{2}) - \int_0^t \int_0^s |u(\tau)| d\tau ds \geq |z_0|(kt+1) + (\beta-\alpha)\frac{t^2}{2}.$$

Правую часть последнего неравенства будем рассматривать как параметрическую функцию:

$$f(k,t,\alpha,\beta,|z_0|) = |z_0|(kt+1) + \frac{\beta-\alpha}{2}t^2 \qquad . (5)$$

Для проверки свойств функции (5) введем некоторые упрощения, т.е., $|z_0| = a$, $\frac{\beta-\alpha}{2} = \gamma$. Таким образом, функция (5) принимает следующий вид:

$$f(k,t,\gamma) = a + akt + \gamma t^2 \quad . (6)$$

Теперь проверим функцию (6) по параметрам ρ, σ и k.

1. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда $f(k,t) = a + akt$ и проанализируем эту функцию по знаку параметра k:

1.1. Пусть $k > 0$. Отсюда $ak > 0$, и не существует положительного решения t, в котором функция равна нулю. Значит в этом случае убегание выполняется. (Рис. -1).

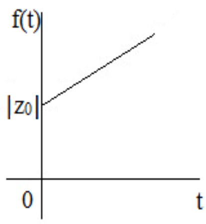

Рисунок-1

1.2. Пусть $k=0$. Отсюда $f(k,t)=a$, и в этом случае расстояние между преследователем и убегающим не меняется. Значит, убегание опять сохраняется. (Рис. 2).

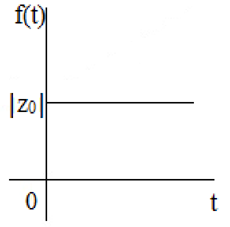

Рисунок-2

1.3. Пусть $k<0$. Тогда $ak<0$. Функция $f(t,k)$ имеет ложительное решение. Таким образом, убегание не выполняется. (Рис. 3).

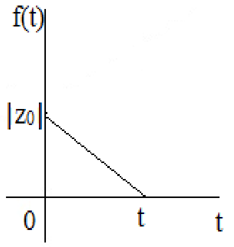

Рисунок-3

2. Пусть $\alpha<\beta$. Отсюда в функции (6) $\gamma>0$. Проанализируем функцию (6) в зависимости от знака параметра k .

2.1. Пусть $k<0$. Тогда $t_0=-\dfrac{ak}{2\gamma}>0$ это точка минимального приближения. Чтобы иметь возможность убегания, дискриминант $D=a^2k^2-4a\gamma$ должен быть отрицательным, т.е. $D=a^2k^2-4a\gamma<0$. Следовательно $k^2<\dfrac{4\gamma}{a}$, и у нас есть интервал $k\in\left(-\sqrt{\dfrac{2(\beta-\alpha)}{|z_0|}},\sqrt{\dfrac{2(\beta-\alpha)}{|z_0|}}\right)$. Если объединить последний интервал с интервалом $k<0$, то убегание выполняется на интервале $k \in \left(-\sqrt{\frac{2(\beta-\alpha)}{|z_9|}}, 0 \right)$. (Рис-4).

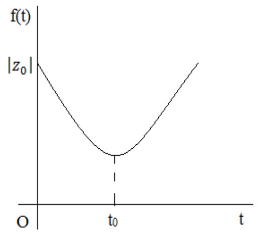

Рисунок-4

2.2. Пусть $k=0$. Тогда $f(t,\gamma)=a+\gamma t^2$ и не существует времени преследования из-за того что $\gamma>0$. Таким образом, убегание выполняется. (Рис. 5).

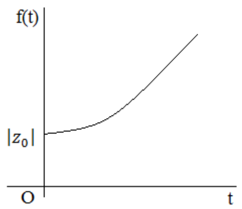

Рисунок-5

2.3. Пусть $k>0$. Следовательно, $t_0<0$ в функции (6). Следовательно, не существует положительного решения t, в котором функция равнялась бы нулю. Так что в этом случае убегание выполняется. (Рис. 6).

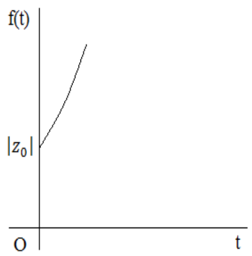

Рисунок-6

Значит, соотношение (3) выполняется во всех значениях интервала $t \geq 0$ согласно неравенству $|z(t)| \geq f(k, t, \alpha, \beta, |z_0|)$ и свойствам (5), то есть задача убегания решена. Доказано.

Литература

1. Azamov A. On the quality problem for simple pursuit games with constraint // Serdica Bulgariacae math. Publ. – Sofia, 1986. - Vol. 12. - № 1. – P. 38-43.
2. Azamov A.A., Samatov B.T. The П-Strategy: Analogies and Applications // The Fourth International Conference Game Theory and Management , June 28-30, 2010, St. Petersburg, Russia, Collected papers. – P. 33-47.
3. Isaacs R. Differential Games. – New York: John &Wiley, 1971. – 480 p.
4. Samatov B.T. The П-strategy in a differential game with linear control constraints // J.Appl.Maths and Mechs. – Elsevier. - Netherlands, 2014. - Vol. 78. - № 3. – P. 258-263.
5. Samatov B.T. The Game with "a Survival Zone" in the case integral-geometric constraints on the controls of the Pursuer // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2012. - № 7. – С. 64-72.
6. Samatov B.T. On a Pursuit-Evasion Problem under a Linear Change of the Pursuer Resource // Siberian Advances in Mathematics. - Allerton Press, Inc.Springer. – New York, 2013. - Vol. 23. - № 4. – P. 294-302.
7. Samatov B.T. The Pursuit- Evasion Problem under Integral-Geometric constraints on Pursuer controls // Automation and Remote Control. – Pleiades Publishing, Ltd. – New York, 2013. - Vol. 74. - №7. – P. 1072-1081.
8. Samatov B.T. The Resolving Functions Method for the Pursuit Problem with Integral Constraints on Controls // Journal of Automation and Information Sciences. – Begell House, Inc. (USA). 2013. - Vol. 45,№8. – P. 41-58.