УДК 517.984

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЕ ГАМИЛЬТОНИАНА СИСТЕМЫ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ.

А.Ж.Сайдуллаев

Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета

Аннотация. В работе рассматривается гамильтониан системы двух произвольных квантовых частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных взаимодействий притяжения. Доказана существование и единственность собственных значение соответствующего дискретного оператора Шредингера в зависимости от размерности решетки, энергия взаимодействия частиц, а также от польного квазиимпульса системы. Построена множества связанных состояний рассматриваемого гамильтониана.

Ключевые слова: Произвольные частицы, гамильтониан, целочисленная решетка, квазиимпульс, связанные состояния, определитель Фредгольма, прямая сумма.

1.Введение

Основная цель этой работы является получения описания спектра гамильтониана системы двух произвольных квантовых частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения на ν $(\nu = 1,2,3)$ - мерной целочисленной решетке.

С этой целью рассмотрим дискретный оператор Шредингера ассоциированной рассмотренной гамильтонианом и изучим собственное значение, виртуальных уровней и их зависимость от полного квазиимпульса системы и от константы связи частиц на ν $(\nu = 1,2,3)$ - мерной решетке.

Известно, что изучение спектра двухчастичного дискретного и непрерывного оператора Шредингера играет важную рол при описание существенного спектра и конечности или бесконечности дискретного спектра трехчастичного оператора [1-5].

Данной работе мы изучим структуру спектра гамильтониана системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения на ν-мерной целочисленной решетке.

2.Постановка задачи. Описание гамильтониана системы двух произвольных частиц на решетке.

Пусть $(T^{\nu})^2$ - декартово произведение ν -мерного куба $T^{\nu}=(-\pi,\pi]^{\nu}$ и $L_2((T^{\nu})^m)$ - гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций, определенных на $(T^{\nu})^m$.

Пусть h_{μ} ограниченный самосопряженный оператор, ассоциированный гамильтонианом системы двух произвольных частиц, взаимодействующих с помощью парного контактного потенциала $\mu>0$. (см. [1,2,4-5]). Оператор h_{μ} действует в $L_2((T^{\nu})^2)$ и имеет вид

$$h_{\mu}=h_0-\mu V\,.$$

Свободный гамильтониан h_0 действует в $L_2((T^{\nu})^2)$ по формуле

$$h_0=\Delta_{k_1}+\Delta_{k_2}\,,$$

где $\Delta_{k_1}=\Delta_1\times I$, $\Delta_{k_2}=I\times\Delta_2$ и Δ_{α}, $\alpha=1{,}2$ - оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\alpha}(k)$. Функция ε_{α}, $\alpha=1{,}2$ определяется по формуле

$$\varepsilon_{\alpha}(p)=\ell_{\alpha}\varepsilon(p),\ \varepsilon(p)=\sum_{i=1}^{\nu}(1-\cos p^{(i)}),\ \ p=(p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(\nu)})\in T^{\nu}\,.$$

Оператор взаимодействия двух частиц V имеет вид

$$Vf\left(k_1,k_2\right)=(2\pi)^{-\nu}\int_{(T^{\nu})^2}\delta(k_1+k_2-k'_1+k'_2)\,f\left(k'_1,k'_2\right)dk'_1\,dk'_2\,,\ \ f\in L_2((T^{\nu})^2)\,,$$

где $\delta(\cdot)$ - обозначает трехмерную дельта функция Дирака.

Пусть $k = k_1 + k_2$ - полный квазиимпульс системы двух частиц, а $\Gamma_k = \{(k_1, k - k_1) \in (T^\nu)^2 : k_1 \in T^\nu\}$ - ν - мерное многообразия. Обозначим через $L_2(\Gamma_k)$ гильбертово пространство всех квадратично интегрируемых функций, определенных на Γ_k. Так как оператор h_μ коммутирует с любым оператором умножения на функцию $u(k),\ k \in T^\nu$, то разложение $L_2((T^\nu)^2) = \int\limits_{T^\nu} \oplus L_2(\Gamma_k)\,dk$ влечет разложения оператора h_μ в прямой интеграл

$$h_\mu = \int\limits_{T^\nu} \oplus \widetilde{h}_\mu(k)\,dk. \qquad (1)$$

Ограниченный самосопряженный оператор $\widetilde{h}_\mu(k),\ k \in T^\nu$ действующий в $L_2(\Gamma_k)$ унитарно эквивалентен оператору $h_\mu(k)$ действующий в $L_2((T^\nu)^2)$ по формуле

$$h_\mu(k) f(q) = \varepsilon_k(q) f(q) - (2\pi)^{-\nu} \mu \int\limits_{T^\nu} f(q')dq',$$

где $\varepsilon_K(q) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(k-q),\quad k \in T^\nu$.

В соответствии с теоремой Вейля [3] о существенном спектре непрерывный спектр $\sigma_{cont}(h_\mu(k))$ оператора $h_\mu(k)$ не зависит от $\mu > 0$ и совпадает со спектром $\sigma(h_0(k))$ невозмущенного оператора $h_0(k)$. Таким образом

$$\sigma_{cont}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\varepsilon_{\min}(k), \varepsilon_{\max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q \in T^3} \varepsilon_k(q)\ ,\ \varepsilon_{\max}(k) = \max_{q \in T^3} \varepsilon_k(q).$$

Из явного вида $\varepsilon_k(q)$ вытекает

$$\varepsilon_{\min}(k) = \nu(\ell_1 + \ell_2) - \sum_{i=1}^{\nu} a(k^{(i)}),\ \varepsilon_{\max}(k) = \nu(\ell_1 + \ell_2) + \sum_{i=1}^{\nu} a(k^{(i)}),$$

где $a(k^{(i)}) = \sqrt{\ell_1^2 + 2\ell_1\ell_2 \cos k^{(i)} + \ell_2^2}$. Следовательно

$$\varepsilon_{\min} = \min_{k \in T^3} \varepsilon_{\min}(k) = \varepsilon_{\min}(0) = 0,\quad \varepsilon_{\max} = \max_{k \in T^3} \varepsilon_{\max}(k) = \varepsilon_{\max}(0) = 2\nu(\ell_1 + \ell_2).$$

Пусть $C(T^\nu)$ - Банахово пространство непрерывных функций определенных на T^ν.

Определение. *Пусть* $\nu \geq 3$. *Если уравнение*

$$\mu(2\pi)^{-\nu}\int_{T^\nu}(\varepsilon_k(q)-\varepsilon_{\min}(k))^{-1}\varphi(q)dq=\varphi(q) \qquad (2)$$

имеет нетривиальное решение в $\varphi\in C(T^\nu)$, *то говорят, что оператор* $h_\mu(k)$ *имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра. Ненарущая общности, нормализуем* φ *так, что* $\varphi(0)=1$ *[1,2, 4].*

Замечание. Пусть оператор $h_\mu(k)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра. Тогда функция

$$\psi(q)=(\varepsilon_k(q)-\varepsilon_{\min}(k))^{-1} \qquad (3)$$

удовлетворяет уравнению Шредингера $h_\mu(k)f=\varepsilon_{\min}(k)f$. Из явного вида функций $\varepsilon_k(q)$ и $\varepsilon_{\min}(k)$ следует, что при $\nu=3{,}4$ и $\nu\geq 5$ имеет место соотношение $\psi\in L_1(T^\nu)\setminus L_2(T^\nu)$ и $\psi\in L_2(T^\nu)$, соответственно. Это означает, что при $\nu\geq 5$ левый край $z=\varepsilon_{\min}(k)$ является собственным значением для оператора $h_\mu(k)$.

Положим

$$\mu(k)=\Big(\int_{T^\nu}(\varepsilon_k(q))^{-1}dq\Big)^{-1},\quad \mu_{\min}=\min_{k\in T^3}\mu(k)=\mu(0),\quad \mu_{\max}=\max_{k\in T^3}\mu(k)=\mu(\pi).$$

Основными результатами работы являются следующие

Теорема 1. *Пусть* $\nu=1$ *или* $\nu=2$. *Тогда для любых* $\mu>0$ *и* $k\in T^\nu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение, и это собственное значение лежит левее непрерывного спектра.*

Теорема 2. *Пусть* $\nu=1$ *или* $\nu=2$. *Тогда спектр оператора* h_μ *состоит из двух непересекающихся отрезков.*

Теорема 3. *Пусть* $\nu=3$. *а) Пусть* $0<\mu\leq\mu_{\min}$. *Тогда спектр оператора* h_μ *состоит из отрезка* $[0,\varepsilon_{\max}]$.

б) Пусть $\mu_{\min}<\mu\leq\mu_{\max}$. *Тогда спектр оператора* h_μ *состоит из отрезка* $[e_{\min},\varepsilon_{\max}]$, *где* $e_{\min}<0$.

в) Пусть $\mu>\mu_{\max}$. *Тогда спектр оператора* h_μ *состоит из непересекающихся отрезков* $[e_{\min},e_{\max}]$ *и* $[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]$, *причем* $e_{\min}<e_{\max}<\varepsilon_{\min}=0$.

Пусть C - комплексная плоскость. Для любых $k \in T^3$ и $z \in C \setminus \sigma_{cont}(h_\mu(k))$ определим функцию $\Delta_\mu(k,z)$ (определитель Фредгольма ассоциированного с оператором $h_\mu(k)$)

$$\Delta_\mu(k,z) = 1 - \mu(2\pi)^{-\nu} \int_{T^\nu} (\varepsilon_k(q) - z)^{-1} dq = 1 - \mu(2\pi)^{-\nu} \Delta(k,z).$$

Отметим, что $\Delta_\mu(\cdot,\cdot)$ вещественна-аналитичная функция в $T^\nu \times (R \setminus \sigma_{cont}(h_\mu(k)))$.

Из принципа Бирмана-Швингера и из теоремы Фредгольма вытекает

Лемма 1. *Для любого* $k \in T^\nu$ *число* $z \in C \setminus \sigma_{cont}(h_\mu(k))$ *является собственным значением оператора* $h_\mu(k)$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_\mu(k,z) = 0$.

Лемма 2. *а) Для каждого* $z \le \varepsilon_{\min}(k)$ *функция* $\Delta(k,z)$ *симметрично относительно перестановки любых двух переменных* $k^{(i)}$ *и* $k^{(j)}$*, четна и* 2π *периодична по каждой переменной.* $k^{(i)}, i, j = 1,\cdots,\nu$.

б) При $\nu \ge 3$ *функция* $\Delta(k, \varepsilon_{\min}(k))$ *строго возрастает по каждой переменной* $k^{(i)} \in [0,\pi], i = 1,\cdots,\nu$.

в) При каждом фиксированном $z \le 0$ *функция* $\Delta(k,z)$ *строго убывает по* $k^{(i)} \in [0,\pi], i = 1,\cdots,\nu$. *При этом имеют место равенства*

$$\min_{k \in T^3} \Delta(k, \varepsilon_{\min}(k)) = \max_{k \in T^3} \Delta(k,0) = \Delta(0,0).$$

Доказательство леммы 2. а) Представим функцию $\varepsilon_k(q)$ в виде

$$\varepsilon_k(q) = 3(l_1 + l_2) - \sum_{i=1}^{3} \sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos k^{(i)} + l_2^2} \cos(q^{(i)} - p(k^{(i)})).$$

Тогда при $z \le \varepsilon_{\min}(k)$ получим следующее представление для $\Delta(k,z)$

$$\Delta(k,z) = \int_{T^\nu} \frac{dq}{\nu(\ell_1 + \ell_2) - \sum_{i=1}^{\nu} [a(k^{(i)} \cos(q^{(i)} - p(k^{(i)}))] - z}$$

Делая замену переменных $q^{(i)} - p(k^{(i)}) = q_1^{(i)}, i = 1,\cdots,\nu$ в последнем интеграле, получим

$$\Delta(k,z) = \int_{T^\nu} \frac{dq_1}{\nu(\ell_1 + \ell_2) - \sum_{i=1}^{\nu} a(k^{(i)} \cos q_1^{(i)} - z}. \qquad (4)$$

При $\nu \ge 3$ интеграл в правой части (5.4) существует при $z = \varepsilon_{\min}(k)$ и имеет вид

$$\Delta(k,z) = \int_{T^\nu} \frac{dq}{\sum_{i=1}^{\nu} \sqrt{l_\beta^2 + 2l_\beta l_\gamma \cos k^{(i)} + l_\gamma^2}(1-\cos q^{(i)})}. \qquad (5)$$

Из четности и периодичности косинуса следует четность и 2π периодичность $\Delta(k,z)$, $z \le \varepsilon_{\min}(k)$ как функции от $k^{(i)}, i = 1,\cdots,\nu$. В (4) подынтегральная функция зависит от $k^{(1)},\cdots,k^{(\nu)}$ как сумма $\sum_{i=1}^{\nu}(a + b_i \cos k^{(i)})$, поэтому сумма симметрична относительно перестановки переменных $k^{(i)}$ и $k^{(j)}, i \ne j; i,j = 1,\cdots,\nu$.

б) Так как косинус монотонно убывает на $[0,\pi]$ и в (5) подынтегральная функция положительна, то мы получим утверждение б) леммы 2.

в) Так как функция $\Delta(k,z) = \Delta(k^{(1)},k^{(2)},\cdots,k^{(\nu)};z)$ симметрична относительно перестановки переменных $k^{(i)}$ и $k^{(j)}, i \ne j; i,j = 1,\cdots,\nu$, то достаточно показать убывание переменной $k^{(1)}$. Обозначим

$$B_1 = B_1(k,z;q^{(2)},\cdots,q^{(\nu)}) = \nu(l_1 + l_2) - \sum_{i=2}^{\nu}\sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos k^{(i)} + l_2^2}\cos q^{(i)} - z$$

и представим функцию $\Delta(k,z)$ в виде

$$\Delta(k,z) = \int_{T^{\nu-1}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq^{(1)}}{B_1 - \sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos k^{(1)} + l_2^2}\cos q^{(1)}} \right) dq^{(2)} \cdots dq^{(\nu)}$$

Внутренний интеграл представив как сумму двух интегралов по отрезкам $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$ и делая замену переменной $\pi + q^{(1)} = q_1^{(1)}$ в первом интеграле имеем

$$\Delta(k,z) = \int_{T^{\nu-1}} \left(\int_{0}^{\pi} \frac{2B_1 dq^{(1)}}{B_1^2 - (l_1^2 + 2l_1 l_2 \cos k^{(1)} + l_2^2)\cos^2 q^{(1)}} \right) dq^{(2)} \cdots dq^{(\nu)}.$$

Очевидно, B_1 не зависит от $k^{(1)}$ и положительна при $z < \varepsilon_{\min}(k)$, поэтому и из монотонной убываемости косинуса на отрезке $[0,\pi]$, следует убывание подынтегральной функции по переменной $k^{(1)} \in [0,\pi]$. Из монотонности интеграла Лебега следует монотонное убывание $\Delta(k,z)$ как функция от $k^{(1)} \in [0,\pi]$. *Лемма 2 доказана.*

Лемма 3. *Пусть* $\nu = 3$. *а) Пусть* $0 < \mu < \mu_{\min}$. *Тогда существует область* $G_\mu \subset T^\nu$ *такая, что для любых* $k \in G_\mu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $e_\mu(k)$ *и* $0 < e_\mu(k) < \varepsilon_{\min}(k)$.

Для любого $k \notin G_\mu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *не имеет собственных значений вне непрерывного спектра.*

б) Пусть $\mu = \mu_{\min}$. *Тогда оператор* $h_\mu(0)$ *имеет виртуальный уровень на левом краю непрерывного спектра, т.е. в точке* $z = 0$. *А при всех* $k \neq 0$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $e_\mu(k)$ *и* $0 < e_\mu(k) < \varepsilon_{\min}(k)$.

в) Пусть $\mu_{\min} < \mu \le \mu_{\max}$. *Тогда существует непустая область* $G_\mu \subset T^\nu$, *и для любого* $k \in G_\mu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $e_\mu(k)$ *и* $e_\mu(k) < 0$.

Для любого $k \notin G_\mu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $e_\mu(k)$ *и* $0 < e_\mu(k) < \varepsilon_{\min}(k)$.

г) Пусть $\mu > \mu_{\max}$. *Тогда для любого* $k \in T^\nu$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $e_\mu(k)$ *и* $e_\mu(k) < 0$.

Доказательство леммы 3. Сначала введем параметр $\tilde{\mu}(k)$, определенную по формуле

$$\tilde{\mu}(k) = (2\pi)^3 \left(\int_{T^3} \frac{dq}{\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)}\right)^{-1}.$$

а) Пусть $0 < \mu \le \tilde{\mu}(k)$. Тогда для любого $k \in T^3$ имеет место неравенства $\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) \ge \Delta_{\tilde{\mu}(k)}(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0$. Из монотонной убываемости $\Delta_\mu(k, \cdot)$ на $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ вытекает, что $\Delta_\mu(k, z) > 0$ для любых $k \in T^3$ и $z \in (-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. Это в силу лемма 2 означает, что оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений при $0 < \mu < \tilde{\mu}(k)$, т.е. в этом случае $G_\mu = \theta$.

Пусть теперь $\tilde{\mu}(k) < \mu < \mu_{\min}$. Тогда имеем $\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) < \Delta_{\tilde{\mu}(k)}(k, \varepsilon_{\min}(k)) = 0$ и $\Delta_\mu(k, 0) > \Delta_{\mu_{\min}}(k, 0) = 0$. Из непрерывности и монотонности функции $\Delta_\mu(k, \cdot)$ на $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ следует, что она имеет единственный нуль $z = e_\mu(k)$ в $(0, \varepsilon_{\min}(k))$. В силу лемма 2 число $z = e_\mu(k)$ является единственным собственным значением оператора $h_\mu(k)$ и множество $G_\mu \subset T^3$ не пусто при $\tilde{\mu}(k) < \mu < \mu_{\min}$.

б) Пусть $\mu = \mu_{\min}$. Тогда уравнение Шредингера $h_\mu(0) f = 0$ имеет нетривиальное решение вида $f_0(q) = \dfrac{1}{\varepsilon_0(q)}$. Так как $\varepsilon_{\min}(k)$ является невырожденной минимум функции $\varepsilon_k(q)$, то $f_0 \in L_1(T^3)$ и $f_0 \notin L_2(T^3)$. Это означает, что оператор $h_\mu(0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра.

Пусть теперь $\mu = \mu_{\min}$ и $k \neq 0$. Из монотонной убываемости $\Delta_\mu(k,\cdot)$ на $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$ вытекает, что $\Delta_\mu(k,z) < \Delta_\mu(k,0) = \Delta_{\mu_{\min}}(k,0) = 0$ при $z \in (0, \varepsilon_{\min}(k))$ и $\Delta_\mu(k,z) > \Delta_{\mu_{\min}}(k,0) = 0$ при $z \in (-\infty, 0)$. Это означает, что монотонная функция $\Delta_\mu(k,\cdot)$ имеет единственный нуль $z = e_\mu(k)$ в $(0, \varepsilon_{\min}(k))$.

в) Пусть $\mu_{\min} < \mu \leq \mu_{\max}$. В этом случае получим неравенству $\Delta_\mu(k, \varepsilon_{\min}(k)) < \Delta_\mu(k,0) < \Delta_{\mu_{\min}}(k,0) = 0$ для любого $k \in G_\mu = T^3$. Это означает, что функция $\Delta_\mu(k,\cdot)$ имеет единственный нуль $z = e_\mu(k)$ в $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$. Множество G_μ^- выбираем следующим образом $G_\mu^+ = \{k \in T^3 : \Delta_\mu(k,0) > 0\}$. Это означает, что для любого $k \in G_\mu^+$ оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений в $(-\infty, 0)$, т.е. $e_\mu(k) \in (0, \varepsilon_{\min}(k))$ при $k \in G_\mu^+$ и следовательно $e_\mu(k) \in (-\infty, 0]$ при $k \in G_\mu^- = T^3 \setminus G_\mu^+$.

г) Пусть $\mu > \mu_{\max}$. Так как $\Delta_\mu(k,0) < \Delta_{\mu_{\max}}(k,0) \leq \Delta_{\mu_{\max}}(k, \varepsilon_{\min}(k)) < 0$ для любого $k \in T^3$ и $\Delta_\mu(k,\cdot)$ непрерывная монотонна убывающая функция в $(-\infty, \varepsilon_{\min}(k))$, то для любого $k \in G_\mu = T^3$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение и это она лежит в интервале $(-\infty, 0)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Собственное значение $e_\mu(k)$ оператора $h_\mu(k)$ является непрерывной функцией по $k \in G_\mu$.*

Доказательство леммы 4. В силу лемма 1 собственное значение $z \in R \setminus \sigma(h_0(k))$ оператора $h_\mu(k)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_\mu(k,z) = 0$, $k \in G_\mu$, где G_μ- множество тех $k \in T^\nu$, что оператор $h_\mu(k)$ имеет собственное значение. Так как $z \in (-\infty, \varepsilon_{\min}(k)) \cup (\varepsilon_{\max}(k), +\infty)$ и функция $\varepsilon_k(q)$ непрерывна по $k \in T^\nu$, то $\varepsilon_k(q) - z \neq 0$ для любого $k, q \in T^\nu$, и следовательно, в силу теоремы предельного перехода под знаком интеграла вытекает непрерывность функции $\Delta_\mu(k, z)$ в $T^\nu \times \{(-\infty, \varepsilon_{\min}(k)) \cup (\varepsilon_{\max}(k), +\infty)\}$. Кроме того, из явного вида $\Delta_\mu(k, z)$ следует, что

$$\frac{\partial \Delta_\mu(k_0, z)}{\partial z} = \int_{T^\nu} \frac{dq}{(\varepsilon_{k_0}(q) - z)^2} > 0 \text{ для любого } z \in (-\infty, \varepsilon_{\min}(k)) \cup (\varepsilon_{\max}(k), +\infty).$$

Пусть $\forall k_0 \in G_\mu$, т.е. $\Delta_\mu(k_0, e_\mu(k_0)) = 0$. Теперь применяя теорему о неявной функции получим, что в некоторой окрестности $U_\delta(k_0) \subset G_\mu$ точки $k_0 \in G_\mu$ существует непрерывная функция $z = e_\mu(k)$. В силу произвольности $\forall k_0 \in G_\mu$ следует, что функция $z = e_\mu(k)$ определена и непрерывна всюду в G_μ. *Лемма 4 доказана.*

Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Применяя лемму Морса для $\varepsilon_k(q) - \varepsilon_{\min}(k)$ получим, что

$$\lim_{z \to 0} \Delta_\mu(k, 0) = -\infty \text{ при } \nu = 1, 2.$$

Функция $\Delta_\mu(k, \cdot)$ непрерывна и монотонна возрастает (см.лемму 2) и для любого $k \in T^\nu$ выполняется равенство

$$\lim_{z \to -\infty} \Delta_\mu(k, z) = 1.$$

Поэтому в силу леммы 1 оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение и это собственное значение лежит в $(-\infty, 0)$. *Теорема 1 доказана.*

Доказательство теоремы 2. Из представление (1), унитарной эквивалентности операторов $\tilde{h}_\mu(k)$ и $h_\mu(k)$, и из теоремы о спектре разложимых операторов вытекает, что

$$\sigma(h_\mu) = \bigcup_{k \in T^\nu} \sigma(h_\mu(k)).$$

Оператор $h_\mu(k)$ имеет не более одно собственное значение, поэтому

$$\sigma(h_\mu)=\bigcup_{k\in G_\mu}\{e_\mu(k)\}\bigcup[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]=[e_{\min},e_{\max}]\bigcup[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]\ , \tag{6}$$

где G_μ - множество тех $k\in T^\nu$, в котором оператор $h_\mu(k)$ имеет собственное значение.

Пусть $\nu=1$ или $\nu=2$. Для любого $k\in T^\nu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k)$<0. Так как T^ν компакт и $e_\mu(k)$ непрерывная функция в T^ν, то $\max_{k\in T^\nu} e_\mu(k)=e_\mu(k_0)<0$. Это означает, что отрезки $[e_{\min},e_{\max}]$ и $[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]$ непересекаются. *Теорема 2 доказана.*

Доказательство теоремы 3. Пусть $\nu=3$. а) Пусть $0<\mu\le\mu_{\min}$. Тогда существует область G_μ (может быть и пустым) такая, что для любого $k\in G_\mu$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k)>0$ (см. лемма 3). Так как $e_\mu(\cdot)$ непрерывная функция в G_μ, то $e_{\min}=\min_{k\in G_\mu} e_\mu(k)\ge 0$. Кроме того, оператор $h_\mu(k)$ не имеет собственных значений в $(\varepsilon_{\max}(k),+\infty)$ и

$$\varepsilon_{\min}=\min_{k\in T^\nu}\varepsilon_{\min}(k)=\varepsilon_{\min}(0)=0\,. \tag{7}$$

Поэтому в силу (6) имеем $\sigma(h_\mu)=[0,\varepsilon_{\max}]$.

б) Пусть $\mu_{\min}<\mu\le\mu_{\max}$. Тогда для любого $k\in G_\mu=T^3$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$. При этом $e_\mu(k)$<0, $k\in G_\mu$ и $e_\mu(k)\ge 0$ при $k\in T^3\setminus G_\mu$. Отсюда получим, что

$$e_{\min}=\min_{k\in T^3} e_\mu(k)=e_\mu(k_1)<0,\ k_1\in G_\mu \text{ и } e_{\max}=\max_{k\in T^3} e_\mu(k)=e_\mu(k_2)>0,\ k_2\in T^3\setminus G_\mu\,.$$

В силу (6) и (7) заключаем, что $\sigma(h_\mu)=[e_{\min},\varepsilon_{\max}]$.

в) Пусть $\mu>\mu_{\max}$. Тогда для любого $k\in T^3$ оператор $h_\mu(k)$ имеет единственное собственное значение $e_\mu(k)$ и $e_\mu(k)$<0. Так как T^3 компакт и $e_\mu(k)$ непрерывная функция на T^3, то $e_{\max}=\max_{k\in T^\nu} e_\mu(k)=e_\mu(k_0)<0$, $k_0\in T^3$. Это означает, что отрезки $[e_{\min},e_{\max}]$ и $[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]$ не пересекаются и в силу (6) имеем $\sigma(h_\mu)=[e_{\min},e_{\max}]\bigcup[\varepsilon_{\min},\varepsilon_{\max}]$. *Теорема 3 доказана.*

Литература

[1]. Лакаев С.Н., Связанные состояния и резонансы N-частичного дискретного оператора Шредингера. Теорет. и матем. Физика, 1992, Т 91, №.1, 51-65.

[2]. С.Н.Лакаев, А.Т.Болтаев. Пароговые явления в спектре двухчастичного оператора Шредингера на решетке. Теоретическая и математическая физика. 2019. Т 198. №3. с.418-432.

[3] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.4, Москва, Наука.

[4]. С.Н.Лакаев, С.М.Саматов, О конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке. ТМФ, 2001, Т 129, № 3, 415-431.

[5]. С.Н.Лакаев, С.М.Саматов, Условия конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке. УМН, Т.57, вып.1, 2002, 155-156.