

УДК. 517.9

Хайруллаев И.Н.

Доцент кафедры “Информационные технологии и точных наук”

Термезский университет экономики и сервиса

Tel: 93-221-08-59

e-mail: xayrullayev0809@mail.ru

**О разрешимости однородной системы некоторый частично-
интегральных уравнений специального вида**

Введение: Изучение интегральных и частично-интегральных уравнений занимает центральное место в современном функциональном анализе и математической физике, находя применение в краевых задачах и спектральной теории операторов. Особую важность представляет класс задач о разрешимости однородных систем линейных уравнений с частично-интегральными операторами, где структура решений определяется детерминантами Фредгольма и взаимодействием нескольких спектральных параметров.

Ключевые слова: Однородная система, частично-интегральные уравнения, детерминант Фредгольма, вырожденное ядро, пространство $L_2(a,b)$ разрешимость, спектральные параметры, линейные интегральные операторы, нулевое решение, нетривиальное решение

Xayrullayev I.N.

Information technology and exact sciences department

Termiz university of economics and service

Introduction: The study of integral and partial-integral equations occupies a central place in modern functional analysis and mathematical physics, with applications ranging from boundary value problems to operator spectral theory. A

particularly important class of problems concerns the solvability of homogeneous systems of linear equations involving partial-integral operators, where the structure of solutions is governed by Fredholm determinants and the interplay of multiple spectral parameters.

Keywords: homogeneous system, partial-integral equations, Fredholm determinant, degenerate kernel, $L_2(a,b)$ space, solvability, spectral parameters, linear integral operators, zero solution, nontrivial solution.

Рассмотрим однородную систему линейных частично-интегральных уравнений вида

$$(1) \quad \begin{cases} f_0 + \lambda_1 \int_a^b a_1(t) f_1(t) dt = 0 \\ f_0 + f_1(x) + \lambda_2 a_2(x) \int_a^b a_2(t) f_1(t) dt + \lambda_3 a_3(x) \int_a^b a_3(t) f_2(x, t) dt = 0 \\ f_1(x) + f_2(x, y) + \lambda_4 a_4(x) \int_a^b a_4(t) f_2(t, y) dt + \lambda_5 a_5(y) \int_a^b a_5(t) f_2(x, t) dt = 0 \end{cases}$$

где функции $a_j(\cdot)$, $j = \overline{1,5}$ принадлежат пространству $L_2[a, b]$, $f_0 \in C^1$, λ_i , $i = \overline{1,5}$ - числовые параметры;

$f_2(x, y) \in L_2([a, b]^2)$, $f_1(x) \in L_2[a, b]$ искомые функции.

В этой заметке изучена разрешимость однородной системы (1) при всех значениях параметров λ_i , $i = \overline{1,5}$ кроме случая

$$\lambda_i \neq 0, i = \overline{1,5}$$

Всюду в дальнейшем интеграл понимается по отрезку $[a, b]$.

Основными результатами являются следующие.

Пусть детерминанты $D_1(\lambda_1) = 1 + \lambda_1 \int_a^b a_1^2(t) dt$ Фредгольма [1] ядра $a_1(t)$

Теорема 1. Пусть $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, тогда

а) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение:

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

б) если $D_1(\lambda_1) = 0$, то однородная система имеет решение

$$f_0 = f_0, f_1(x) = f_2(x,y) = f_0, f_0 \in C^1, f_0 \neq 0$$

$D_2(\lambda_2) = 1 + \lambda_2 \int a_2^2(t)dt$ детерминант Фредгольма ядро $K(x,t) = a_2(x)a_2(t)$.

Теорема 2. Пусть $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$. Тогда:

а) если $D_2(\lambda_2) = 0$ то однородная система (1) имеет решение вида

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(x) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ ca_2(x) \\ -ca_2(x) \end{pmatrix}$$

б) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$ то система имеет только нулевое решение.

Аналогичные результаты как в теореме (2) получено и в случаях:

1) $\lambda_3 \neq 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, 4, 5$;

2) $\lambda_4 \neq 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, 5$;

3) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$;

Теорема 3. Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ и Тогда :

а) если $D_1(\lambda_1) \neq 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt = 0$ имеет решение вида $f_0 = 0, f_1(x) = -\lambda_2 ca_2(x), f_2(x,y) = \lambda_2 ca_2(x)$ где c – произвольная постоянная,

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt \neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$$f_0 = A(a_1, a_2), f_1(x) = -c_1 - \lambda_2 c_2 a_2(x), f_2(x,y) = c_1 + \lambda_2 c_2 a_2(x)$$

где $A(a_1, a_2) = \frac{c\lambda_1\lambda_2 \int a_1(t)a_2(t)dt}{D_1(\lambda_1)} = c' \cdot c_1, c_2, c'$ постоянные.

б) если $D_1(\lambda_1) = 0$, то

1) при $\int a_1(t)a_2(t)dt = 0$ система (1) имеет решение вида

$$f_0 = c_1, f_1(x) = -c_1 - \lambda_2 c_2 a_2(x), f_2(x, y) = c_1 + \lambda_2 c_2 a_2(x)$$

где c_1, c_2 – константы;

2) при $\int a_1(t)a_2(t)dt \neq 0$ однородная система (1) имеет решение вида

$$f_0 = c_2, f_1(x) = -c_2 - ca_2(x), f_2(x, y) = c_2 + ca_2(x) \text{ где } c - \text{ постоянная.}$$

Отметим, что в случаях когда двое из параметров отличны от нуля, а остальные равны нулю имеют аналогичные теоремы.

Теперь пусть $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1 - \int [\sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k^2(t)] dt$ детерминанты Фредгольма ядро $k(x, t) = \sum_{k=1}^3 \lambda_k a_k(x)a_k(t)$.

Теорема 4. Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ Тогда:

а) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$, то система (1) имеет решение вида $f_0 = \lambda \sum_{k=1}^3 c_k \lambda_k^2 \int a_k^2(t) dt = c, f_1(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i a_i(x), f_2(x, y) = -\sum_{i=1}^3 \lambda_i c_i a_i(x)$

б) если $D(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

Аналогичные теоремы можно сформулировать и при остальных случаях когда трое из параметров отличны от нуля и остальные равны нулю.¹

Теорема 5. Пусть $\lambda_i \neq 0, i = \overline{1,4}, \lambda_5 = 0$ и

¹ Kholiyorov Erkin, Turayev Dilmurod, Buriyev Javokhir (2024). Numerical solution of boundary inverse problem for fluid relaxation filtration in porous media. AIP Conference Proceedings, <https://doi.org/10.1063/5.0241626>

$D_4(\lambda_4) = 1 + \lambda_4 \int a_4^2(t) dt \neq 0$ Тогда:

а) если $D(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) = 1 + \sum_{j=1}^3 \lambda_j^2 \int a_j^2(t) dt = 0$, то система (1) имеет решение вида $f_0 = c_2, f_1(x) = A_1(x), f_2(x, y) = B_1(x)$, где

$$c = -\lambda_1 \sum_{i=1}^3 \lambda'_i c_i \int a_i(t) a'_i(t) dt, A_1(x) = \sum_{j=1}^3 \lambda'_j \hat{a}_j(x) c_j,$$

$$B_1(x) = \frac{\lambda_4 a_4(x)}{D_4(\lambda_4)} \sum_{i=1}^3 \lambda'_i c_i \int a_4(t) \hat{a}_i(t) dt;$$

б) если $D(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3) \neq 0$, то система (1) имеет только нулевое решение.

Использованные источники:

1. Смирнов В.И. “Курс высшей математики ” Т.4. , Часть I. ,М. “Наука”, 1974 г
2. Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. М.: Мир. 1977, 1, Функциональный анализ.
3. Хайруллаев И.Н. Некоторые частично-интегральные операторы и их спектральные свойства //Кандидатская диссертационная работа. Ташкент, 2001.
4. Kholiyorov Erkin, Turayev Dilmurod, Buriyev Javokhir (2024). Numerical solution of boundary inverse problem for fluid relaxation filtration in porous media. AIP Conference Proceedings, <https://doi.org/10.1063/5.0241626>