СЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ И РАСЧЕТ ИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Соатов Улугбек Абдукадирович, к.ф-м.н.,доцент.
Джанизоков Улугбек Абдуганиевич, старший преподаватель.
Кафедра "Высшая математика", Джизакский политехнический институт.

Аннотация: На практике часто наблюдается так называемые сложные события, исследуемые методами теории вероятностей. В этой статье изучено вероятность сложных событий и её некоторые применения для решения ряда задач.

Ключевые слова: Сложное событие, испытание, опыть, вероятность, условная вероятность, формула умножения, формула сложения, метод.

COMPLEX PHENOMENA AND CALCULATION OF THEIR PROBABILITIES

Soatov Ulugbek Abdukadirovich - Ph.D., Associate Professor;
Dzhanizokov Ulugbek Abduganievich - Senior Lecturer,
Department of Higher Mathematics,
Jizzakh Polytechnic Institute.

Abstract: In practice, so-called complex events are often observed, investigated by methods of probability theory. This article examines the probability of complex events and some of its applications for solving a number of problems.

Keywords: Complex event, test, experiment, probability, conditional probability, multiplication formula, addition formula, method.

Введение. Известно, что теория вероятностей изучает модели экспериментов со случайными исходами (случайных экспериментов) и всякий случайный эксперимент (испытания, опыт) состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий и наблюдении результата [1-2]. Предметом наблюдения в том или ином случайном опыте может быть некоторый процесс, физическое явление или действующая система. Для реально воспроизводимого эксперимента понятие «наблюдаемый результат» означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора. И, любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта, которого называем случайным событием. Заметим, что событие может произойти, а может и не произойти в результате опыта.

Сложные события и их вероятность. На практике часто наблюдается сложные события и задачи для нахож-дения вероятностей наступления таких событий. Сложным событием называется наблюдаемое событие, выраженное через другие наблюдаемые в том же эксперименте события с помощью допустимых алгебраических операций. Вероятность осуществления того или иного сложного события вычисляется с помощью формулы умножения, т.е. если оба события A и B обладают ненулевой вероятностью то формула умножения может быть записана двояким образом в виде

$$\mathrm{P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B)} \qquad (1)$$

и формулы сложения, которая в случае двух произвольных наблюдаемых событий A и B записывается в виде

$$\mathrm{P(A+B) = P(A)+P(B) - P(AB)}, \qquad (2)$$

в частном случае, когда $\mathrm{A\cdot B}=\varnothing$, то

$$\mathrm{P(A+B) = P(A)+P(B)} \text{ (аксиома сложения).}$$

Отметим, что формула (1) позволяет вычислить вероятность совместного осуществления событий A и B в тех случаях, когда условные вероятности $P(B/A)$ и $P(A/B)$ считается известной из дополнительных опытов или определяется методом вспомогательного эксперимента.

Формула умножения для произвольного числа событий записывается следующим образом:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\ldots\cdot P(A_n/A_1A_2\ldots\ldots A_{n-1}) \qquad (3)$$

Формула (3) справедлива, если все входящие в правую часть условные вероятности определены [3-9].

Аналогично, формула (2) для n слагаемых обобщается следющим образом:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{\substack{i \\ i<j}}\sum_{j}P(A_iA_j)+\sum_{\substack{i \\ i<j<k}}\sum_{j}\sum_{k}P(A_iA_jA_k)+\ldots.+(-1)^{n-1}P(A_1A_2A_3\ldots A_n). \qquad (4)$$

В частности, для вероятности осуществления хотя бы одного из трех событий, A, B и C получаем формулу

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \qquad (5)$$

Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ независимы в совокупности то вероятность осуществления хотя бы одного из них проще вычисляется не по формуле сложения (4), а с помощью формулы умножения:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P\left(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_n}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(\overline{A_n}\right) \qquad (6)$$

Задачи для применения. Теперь рассмотрим некоторые задачи вычисления вероятностей сложных событий.

Задача 1. В продукции завода брак составляет 5% от общего количества выпускаемых деталей. Для контроля отобрано 20 деталей. Какова вероятность того, что среди них имеется хотя бы одна бракованная?

Решение: Для любой детали из продукции завода вероятность быть бракованным равна по условию 5%, т.е $\mathrm{p}=0.05=\mathrm{P}(A_k)$, $k=1,2,\ldots,20.$, где событие $A_k =$ (k-я по счету извлечённая деталь бракованная). Очевидно, нас интересует событие $A_1+A_2+\ldots+A_{20}$. В условиях отлаженного технологического процесса можно считать, что события $A_1+A_2+\ldots+A_{20}$ независимы в совокупности. Тогда по формуле (6) получаем:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_{20})=1-\prod_{k=1}^{20}P\left(\overline{A_k}\right)=1-0.95^{20}\approx 0.64$$

Задача 2. Из 100 студентов, находящихся в аудатории, 50 человек знают английский язык, 40- французский и 35- немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий -8, французский и немецкий -10. Все три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудатории. Вычислить вероятности следующих событий: А-вышедший знает или английский или французский язык; B- вышедший знает только английский язык; C- вышедший не знает ни одного языка.

Решение. Рассмотрим следующие события: E-вышедший знает английский язык, F - вышедший знает французский язык, D - вышедший знает немецкий язык.

Так как $A = E + F$, то, используя формулу (2) получим:

$$P(A) = P(E) + P(F) - P(EF) = \frac{50}{100} + \frac{40}{100} - \frac{50}{100} \cdot \frac{40}{100} = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7 .$$

Событие B можно представить в виде $\mathrm{B} = \mathrm{E}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{F}}$. Тогда используя формулу умножения (1), свойства условной вероятности и формулу сложения (2) получим:

$$P(B) = P\left(E\bar{D}\bar{F}\right) = P(E) \cdot P(\bar{D}\bar{F} / E) = P(E) \cdot \left(1 - P\left(D + F / E\right)\right) =$$

$$= P(E) - P(E) \cdot P(D + F / E) = P(E) - P(DE + FE) =$$

$$= P(E) - (P(DE) + P(EF) - P(DEF)) = 0,5 - 0,08 - 0,2 + 0,05 = 0,27$$

Для вычисления вероятности события $C = \bar{E}\bar{D}\bar{F}$ используем правилу де Моргана [5] и формулу сложения (5) для трех событий и получим следующие

$$P(C) = P\left(\bar{E}\bar{D}\bar{F}\right) = P\left(\overline{E + D + F}\right) = 1 - P(E + D + F) =$$

$$= 1 - (P(E) + + P(D) + P(F) - P(ED) - P(EF) - P(DF) + P(EDF)) = 0,08$$

Задача 3. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение: Вероятность попадания в мишень хотя бы при одном из трех выстрелов (событие A) равна $P(A) = 1 - q^3$, где q-вероятность промаха.

По условию $P(A) = 0,875$. Следовательно, $0,875 = 1 - q^3$ или

$q^3 = 1 - 0,875 = 0,125$. Отсюда $q = \sqrt[3]{0,125} = 0,5$.

Искомая вероятность $p = 1 - q = 1 - 0,5 = 0,5$.

Задача 4. Происходит воздушный бой между бомбардировщиком и двумя атакующими его истребителями. Стрельбу начинает бомбардировщик: он дает по каждому истребителю один встрел и сбивает его вероятностью p_1. Если данный истребитель не сбит, то он независимо от судьбы другого стреляет по бомбордировщику и сбивает его с вероятностью p_2. Определить вероятности следущих исходов боя:

A- сбит бомбардировщик; *B*- сбиты оба истребителя; *C*- сбит хотя бы один истребитель; *Д*- сбит хотя бы один самолет; *E*- сбит ровно один истребитель; *F*- сбит ровно один самолет.

Решение. Вероятность того, что один истребитель собьет бомбардировщик, равна $(1-p_1)p_2$; вероятность того, что хоть один из них собьет бомбардировщика:

$$P(A)=1-\left[1-(1-p_1)p_2\right]^2; \quad P(B)=p_1^{\ 2}; \quad P(C)=1-(1-p_1)^2;$$
$$P(D)=1-(1-p_1)^2(1-p_2)^2; \quad P(E)=2p_1(1-p_1).$$

Событие F представляется в виде $F=F_1+F_2+F_3$, где F_1 – сбит бомбардировщик, а оба истребителя целы, F_2 – первый истребитель сбит, а второй истребитель и бомбардировщик целы, F_3 – второй истребитель сбит, а первый истребитель и бомбардировщик целы.

Тогда вероятности событий F_1, F_2 и F_3 равны, соответственно,

$$P(F_1)=(1-p_1)^2\left[1-(1-p_2)^2\right]; \quad P(F_2)=P(F_3)=p_1(1-p_1)(1-p_2).$$

Следовательно, получим вероятность события F в виде

$$P(F)=(1-p_1)^2\left[1-(1-p_2)^2\right]+2p_1(1-p_1)(1-p_2).$$

Задача 5. Радиолокационная станция ведет наблюдение за k объектами. За время наблюдения i – й объект может быть потерян с вероятностью $p_i(i=1,2,...,k)$ Найти вероятности следующих событий: A – ни один объект не будет потерян; B – будет потеряно не менее одного объекта; C – будет потеряно не более одного объекта.

Решение. $P(A)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$; $P(B)=1-\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)$;

$$P(C)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)+p_1(1-p_2)....(1-p_k)+(1-p_1)p_2(1-p_3)....(1-p_k)+....$$
$$...+(1-p_1)(1-p_2)....(1-p_{k-1})p_k.$$

Последнюю вероятность можно записать в виде

$$P(C)=\prod_{i=1}^{k}(1-p_i)+\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{1-p_i}\prod_{i=1}^{k}(1-p_i).$$

Задача 6. N стрелков независимо один от другого ведут стрельбу каждый по своей мищени. Каждый из них имеет боезапас k патронов. Вероятность попадания в мищень при одном выстреле для i – го стрелка равна $p_i(i=1,2,...,N)$. При первом же попадании в свою мищень стрелок прекращает стрельбу. Найти вероятности следущих событий:

A – у всех стрелков вместе останется неизрасходованным хотя бы один патрон; B – ни у кого из стрелков не будет израсходован весь боезапас; C – какой –либо один из стрелков израсходует весь боезапас, а все остальные – не весь.

Решение. Событие $\overline{A}$ – весь боезапас израсходован – требует, чтобы у всех N стрелков первые $k-1$ выстрелов дали промах:

$$P(\overline{A})=\prod_{i=1}^{N}(1-p_i)^{k-1}; \qquad P(A)=1-\prod_{i=1}^{N}(1-p_i)^{k-1}.$$

Событие B требует, чтобы у каждого стрелка хотя бы один из первых $k-1$ выстрелов дал попадание:

$$P(B)=\prod_{i=1}^{N}\left[1-(1-p_i)^{k-1}\right].$$

Событие C может осуществиться в N вариантах: $C=C_1+C_2+...+C_N$, где C_i-i-й стрелок израсходовал весь боезапас, а остальные – не весь $(i=1,2,...,N)$.

$$P(C)=P(C_1)+...+P(C_N)=(1-p_1)^{k-1}\left[1-(1-p_2)^{k-1}\right]....\left[1-(1-p_N)^{k-1}\right]+....+$$

$$+(1-p_N)^{k-1}\left[1-(1-p_1)^{k-1}\right]....\left[1-(1-p_N)^{k-1}\right]=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{(1-p_i)^{k-1}}{1-(1-p_i)^{k-1}}\prod_{j=1}^{N}\left[1-(1-p_j)^{k-1}\right]\right\}$$

Использованная литература.

1. Д.Т.Письменный «Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике». Москва. «Айрис Пресс». 2004.
2. В.Е.Гмурман Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая.школа, 2005. – 480с.
3. Н.С.Пискунов, Дифференциальное интегральное исчисление, для ВТУЗов, Том 2, М. Наука, 2001.
4. В.Г.Крупин, А.Л.Павлов. Л.Г. Попов., Высшая математика. «Теория вероятностей. Математическая статистика. Случайные процессы». Москва. Издательский дом МЭИ, 2013 г.
5. В. В. Бобынин. Морган, Август // Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона : в 86 т. (82 т. и 4 доп.). — СПб., 1896. — Т. XIX а. — с. 832—833.
6. Гадаев, Р. Р., & Джонизоков, У. А. (2020). ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА ДВУМЕРНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА. *Наука и образование сегодня*, (12), 6-8.
7. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2021, June). ON SOME PROBLEMS OF EXTREME PROPERTIES OF THE FUNCTION AND THE APPLICATION OF THE DERIVATIVE AND METHODS FOR THEIR SOLUTION. In *Archive of Conferences* (pp. 113-117).
8. Abdukadirovich, S. U., & Abduganievich, D. U. (2020). ABOUT THE ISSUES OF GEOMETRICAL INEQUALITIES AND THE METHODS OF THEIR SOLUTION. *European science*, (7 (56)).
9. Гадаев, Р. Р., & Джонизоков, У. А. (2016). О семействе обобщенных моделей Фридрихса. *Молодой ученый*, (13), 5-7.